

Zestaw zadań 2: Arytmetyka reszt.¹

- (1) Załóżmy, że dzisiaj jest czwartek godzina 14⁰⁰. Jaki dzień tygodnia będzie dokładnie za 10000 dni (lat)²? Jaki dzień tygodnia i która godzina będzie za 13551 godzin?
- (2) Sprawdzić łączność dodawania, łączność mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania w \mathbb{Z}_2 .
- (3) Sprawdzić, czy jest ciałem system $\mathbb{F}_4 = \langle \{0, 1, a, b\}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ w którym działania $+$ i \cdot określone są tabelkami:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

- (4) (a) Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^2$ w \mathbb{Z}_{11} .
 (b) Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^{-1}$ w \mathbb{Z}_{13}
 (c) Wyznaczyć dziedzinę oraz ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto \frac{x+2}{2x-1}$ w \mathbb{Z}_7 .
- (5) Rozwiązać równanie:
 (a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ w \mathbb{Z}_{11} , (b) $x^2 + x + 3 = 0$ w \mathbb{Z}_5 ,
 (c) $2x^2 + 2x + 2 = 0$ w \mathbb{Z}_{13} , (d) $2x^3 + 3x^2 + x - 4 = 0$ w \mathbb{Z}_7 .
- (6) Sprawdzić, że połowa różnych od zera elementów ciała \mathbb{Z}_{13} to kwadraty elementów \mathbb{Z}_{13} .
- (7) Dla jakich wartości parametru $m \in K$ równanie $mx^2 + (2m+1)x + m - 2$ ma dwa różne rozwiązania w ciele K
 (a) gdy $K = \mathbb{Z}_{11}$? (b) gdy $K = \mathbb{Z}_{13}$?
- (8) Wykazać, że każdy element ciała \mathbb{Z}_5 jest sześcianiem elementu \mathbb{Z}_5 . To samo dla ciała \mathbb{Z}_{11} . A jak to będzie w przypadku ciała \mathbb{Z}_{13} ?
- (9) Sprawdzić czy istnieją – i wyznaczyć, jeśli istnieją – pierwiastki kwadratowe z -1 w ciele \mathbb{Z}_p dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.
- (10) Rozwiązać równanie $5x = 2$ w \mathbb{Z}_{65537} .
- (11) Znaleźć taki element \mathbb{Z}_5 , że każdy inny element różny od 0 jest jego potęgą. To samo dla ciał \mathbb{Z}_7 oraz \mathbb{Z}_{11} .
- (12) Sprawdzić, że każdy różny od 0 element ciała \mathbb{Z}_5 podniesiony do pewnej potęgi daje 1. To samo dla ciał \mathbb{Z}_7 oraz \mathbb{Z}_{11} .
- (13) Wykonać działania: $(6^2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 1) \cdot (5 \cdot 12 - 7)^{-1}$ w \mathbb{Z}_{17} oraz w \mathbb{Z}_{23} .
- (14) Rozwiązać układ równań
 (a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 9y = 4 \end{cases}$ w \mathbb{Z}_{13} i w \mathbb{Z}_7 (b) $\begin{cases} 5x + 4y = a \\ 4x + 3y = b \end{cases}$ w \mathbb{Z}_{11} i w \mathbb{Z}_5 .

¹Idea systemu, w którym określone jest dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie pojawiała się w pracach E. Galois (ciała skończone) i B. Riemanna (ciała funkcji meromorficznych) - bez nazwy. Pojęcie ciała pojawiło się po raz pierwszy w pracach Richarda Dedekinda (1831 - 1916) pod nazwą "dziedzina wymierności". Wprowadzenie nazwy "ciało" należy przypisać Peterowi G. Lejeune-Dirichletowi i Dedekindowi.

Uwaga. Na świecie istnieją dwa systemy nazewnictwa: 1) po angielsku – field, po rosyjsku – polje, 2) po niemiecku – Körper, po francusku – corps. Jak widać, polska terminologia wzorowana jest na niemieckiej i francuskiej.

²W obowiązującym od 1582 r. kalendarzu gregoriańskim, opracowanym przez Luigi Lilio (ok. 1510 - ok. 1560 r.) 366 dni mają lata, których numer dzieli się przez 4 ale nie dzieli się przez 100, oraz lata, których numer dzieli się przez 400; pozostałe lata mają 365 dni. W ten sposób średni rok kalendarzowy ma 365,2425 dni, a średni rok zwrotnikowy ma 365 dni, 5 godzin, 48 minut i 46 sekund, czyli 365,2422 doby.

- (15) Podaj liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 9x + y = 7 \end{cases}$ w ciele \mathbb{Z}_{11} . To samo w \mathbb{Z}_{13} i \mathbb{Z}_{17} .
- (16) (H. Steinhaus³) Obliczyć wszystkie wyrazy ciągu $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$ w ciele \mathbb{Z}_{11} .
- (17) (H. Steinhaus) Sprawdzić, że $3^{105} + 4^{105} = 0$ w ciałach $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{181}, \mathbb{Z}_{379}$, oraz że $3^{105} + 4^{105} \neq 0$ w \mathbb{Z}_5 ani w \mathbb{Z}_{11} .
- (18) Wyprowadzić wzór na funkcję: $f(k) = \frac{1}{2}$ w \mathbb{Z}_{2k-1} .
- (19) Obliczyć $\frac{1}{5}$ w \mathbb{Z}_n dla $n = 6, 7, 8, 9, 11, 13$.

³Hugo Dionizy Steinhaus (1887 - 1972) słynny matematyk polski; po II wojnie światowej pracował we Wrocławiu.