

Zestaw zadań 15: Funkcjonały dwuliniowe i formy kwadratowe

(1) Sprawdzić, czy następujące odwzorowania $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) &= xx' + x^2y' + z'; & \text{b) } \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) &= xz' + yx' + 2; \\ \text{c) } \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) &= xx' + 2yz' + zz'; & \text{d) } \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) &= xx' + xy' + z'; \\ \text{e) } \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) &= 0; & \text{f) } \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) &= 1. \end{aligned}$$

są funkcjonalami dwuliniowymi. Które z nich są symetryczne ?

(2) Niech $V = \mathbb{R}[X]_n$ będzie przestrzenią wektorową wielomianów stopnia $\leq n$ nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. Odwzorowanie $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ określone jest wzorem

$$b(f(X), g(X)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Wykazać, że b jest funkcjonalami dwuliniowymi, symetrycznym, nie degenerowanym, dodatnio określonym. Wyznaczyć macierz b względem bazy $1, X, \dots, X^n$.

(3) W przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{Q}^3, \xi)$ macierz funkcjonału dwuliniowego ξ w bazie

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

jest równa:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Znaleźć wzór analityczny na $\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$. Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni V .

(4) Funkcjonał dwuliniowy $\xi : \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}$ ma w bazie kanonicznej $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Niech $W = \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni W .

(5) Przestrzeń ortogonalną (K^3, ξ) , w której ξ ma w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ przedstawić jako sumę prostą ortogonalną podprzestrzeni nie degenerowanej i podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej.

- (6) Funkcjonał dwuliniowy $\xi : V \times V \rightarrow K$ ma w pewnej bazie przestrzeni V macierz

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}. \text{ Obliczyć wymiar } V^\perp.$$

- (7) Niech $\text{char}(F) \neq 2$. Sprawdzić, że

a) jeśli ξ jest symetryczną formą dwuliniową nad F , $q(\alpha) = \xi(\alpha, \alpha)$ i $\zeta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta))$, to $\zeta = \xi$;

b) jeśli q jest formą kwadratową nad F , $\xi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta))$, $N(\alpha) = \xi(\alpha, \alpha)$, to $N = q$.

- (8) Niech w przestrzeni $\mathbb{Z}_5^2$ forma kwadratowa wyraża się wzorem

$$q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2.$$

a) Wyznaczyć uzupełnienie ortogonalne $\left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right]^\perp$ wektora $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

b) Wyznaczyć dopełnienie ortogonalne prostej $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

- (9) Niech w przestrzeni $\mathbb{Z}_2^2$ forma dwuliniowa ξ będzie określona wzorem

$$\xi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Wykazać, że $(\mathbb{Z}_2^2, \xi)$ jest niezdegenerowaną przestrzenią ortogonalną, w której każdy wektor jest izotropowy. Wykazać, że ta przestrzeń nie ma bazy prostopadłej.

- (10) Niech w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ forma kwadratowa wyraża się wzorem:

$$\text{i) } q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{ii) } q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2.$$

a) Wyznaczyć uzupełnienie ortogonalne wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

b) wyznaczyć wszystkie dopełnienia ortogonalne prostej $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

- (11) Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną, zaś q_ξ - formą kwadratową tej przestrzeni. Wykazać, że

a) $\xi(\alpha, \beta) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q_\xi(\alpha + \beta) = q_\xi(\alpha) + q_\xi(\beta)$;

b) $q_\xi(\alpha + \beta) + q_\xi(\alpha - \beta) = 2(q_\xi(\alpha) + q_\xi(\beta))$ dla każdych $\alpha, \beta \in V$;

c) $q_\xi(\alpha) = q_\xi(\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = 0$;

- (12) a) Udowodnić, że dla dowolnej formy dwuliniowej ξ i dowolnych wektorów α, β zachodzi **tożsamość Cauchy'ego**:

$$q(\alpha)(q(\alpha)q(\beta) - \xi(\alpha, \beta)\xi(\beta, \alpha)) = q(q(\alpha)\beta - \xi(\alpha, \beta)\alpha);$$

b) wykazać, że dla dowolnych dwóch wektorów α i β z dodatnio określonej przestrzeni ortogonalnej

(V, ξ) zachodzi **nierówność Cauchy'ego**:

$$\xi(\alpha, \beta)^2 \leq q(\alpha)q(\beta).$$

(13) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{Q}^3, \xi)$ gdy $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = yz + xz + xy$.

(14) Niech (V, ξ) będzie niezdegenerowaną przestrzenią ortogonalną nad ciałem F , a $v_1, \dots, v_n$ - jej bazą prostopadłą unormowaną. Niech

$$W = \{x_1v_1 + \dots + x_nv_n \in V : x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- a) $\text{char}(F)$ dzieli n ;
- b) $W^\perp$ jest zdegenerowana;
- c) $W^\perp \subset W$;
- d) W jest zdegenerowana.

(15) Macierz funkcjonału dwuliniowego $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ w bazie $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$ jest równa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Znaleźć uzupełnienie ortogonalne:}$$

a) wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$

b) podprzestrzeni $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$

c) podprzestrzeni $\text{Sol}(X - Z = 0).$

(16) Niech ξ będzie zwykłym iloczynem skalarnym w przestrzeni F^n , a A - macierzą o m wierszach i n kolumnach. Oznaczmy W podprzestrzeń F^n generowaną przez transponowane wiersze A , zaś $A \cdot$ - przekształcenie liniowe $v \mapsto A \cdot v$. Wykazać, że

a) $W^\perp = \text{Ker}(A \cdot);$ b) $(\text{Ker}(A \cdot))^\perp = W;$ c) $\dim W + \dim(\text{Ker}(A \cdot)) = n.$

Jaką własność musi mieć ciało F , żeby dla wszystkich m, n zachodziła równość $F^n = W \oplus \text{Ker}(A \cdot)$?

(17) Obliczyć (w zależności od parametru a) wymiar radykału przestrzeni ortogonalnej w której forma

dwuliniowa ma względem pewnej bazy macierz $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}.$

(18) W przestrzeni F_n^n macierzy kwadratowych stopnia n nad ciałem F określamy formę kwadratową wzorem $q(A) = \text{tr}(A^2) - (\text{tr}(A))^2$. Wykazać, że F_n^n jest sumą prostą ortogonalną swoich podprzestrzeni $A_n(F)$ macierzy antysymetrycznych i $S_n(F)$ macierzy symetrycznych.

(19) W przestrzeni F_2^2 macierzy kwadratowych stopnia 2 nad ciałem F określamy formę kwadratową wzorem $q(A) = \det(A)$. Wykazać, że F_2^2 jest sumą ortogonalną podprzestrzeni $S_2(F)$ macierzy symetrycznych i $A_2(F)$ macierzy antysymetrycznych.

- (20) W przestrzeni F_n^n macierzy kwadratowych stopnia n nad ciałem F określamy formę kwadratową wzorem $q(A) = \text{tr}(A^\top \cdot A)$. Wykazać, że F_n^n jest sumą ortogonalną swoich podprzestrzeni $S_n(F)$ macierzy symetrycznych i $A_n(F)$ macierzy antysymetrycznych.
- (21) Dwa układy wektorów $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ i $(w_1, w_2, \dots, w_k)$ przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) nazywamy **wzajemnymi** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\xi(v_i, w_j) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{gdy } i = j \end{cases}.$$

- a) wykazać, że jeśli układy wektorów $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ i $(w_1, w_2, \dots, w_k)$ są wzajemne, to każdy z nich jest liniowo niezależny;
- b) wykazać, że jeśli układ wektorów $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej jest liniowo niezależny, to istnieje dla niego układ wzajemny;
- c) znaleźć choć jeden układ wzajemny dla $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ w przestrzeni (F^2, ξ) jeśli
- c1) $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$; c2) $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x^2 + xy + y^2$; c3) $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = xy$;
- d) podać przykład przestrzeni ortogonalnej i liniowo niezależnego układu wektorów, dla którego nie istnieje układ wzajemny.
- e) wykazać, że układ wzajemny z bazą jest bazą.
- (22) Niech $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ i $(w_1, w_2, \dots, w_k)$ będą wzajemnymi bazami niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) . Sprawdzić, że:
- a) jeśli dwa endomorfizmy $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ mają własność: bazy $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_k))$ i $(\psi(w_1), \psi(w_2), \dots, \psi(w_k))$ są wzajemne, to $\det(\varphi) \det(\psi) = 1$;
- b) endomorfizm $\varphi \in \text{End}(V)$ taki, że bazy $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_k))$ i $(\varphi(w_1), \varphi(w_2), \dots, \varphi(w_k))$ są wzajemne, jest automorfizmem ortogonalnym.
- (23) Sprawdzić, że dla ustalonej macierzy $A \in F_n^n$ wzór $\xi(X, Y) = \text{tr}(X^\top AY)$ określa funkcjonal dwuliniowy w przestrzeni F_n^n . Kiedy ten funkcjonal jest symetryczny? niezdegenerowany?
- (24) Wykazać, że przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z funkcjonalem dwuliniowym $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danym którymkolwiek ze wzorów:

a) $\xi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_3y_3,$

b) $\xi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) + x_3y_3,$

jest przestrzenią euklidesową, natomiast przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z funkcjonalem dwuliniowym $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danym którymkolwiek ze wzorów:

c) $\xi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2,$

d) $\xi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = x_2y_1 + x_1y_2 + x_3y_3,$

$$e) \xi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_3y_1 + x_1y_3.$$

nie jest przestrzenią euklidesową. Które z tych przestrzeni są niezdegenerowane?

- (25) W przestrzeniach ortogonalnych $\mathbb{R}^3$ z funkcjonalami dwuliniowymi ξ określonymi wzorami c), d), e) z poprzedniego zadania wskazać niezerowe podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane.
- (26) Niech $\xi : \mathbb{R}[X]_n \times \mathbb{R}[X]_n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie przekształceniem danym wzorem

$$\xi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Sprawdzić, że $(\mathbb{R}[X]_n, \xi)$ jest przestrzenią euklidesową. Napisać macierz ξ w bazie $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ dla $n = 1, 2, 3, 4$.

- (27) Niech I będzie dowolnym niejednopunktowym przedziałem domkniętym, a V niech będzie dowolną skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni $C(I)$ i niech

$$\xi(f, g) = \int_I f(t)g(t)dt.$$

Wykazać, że (V, ξ) jest przestrzenią euklidesową.

- (28) Wykazać, że

$$a) \alpha \perp \beta \Leftrightarrow q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta);$$

b) suma dwóch wektorów izotropowych jest wektorem izotropowym wtedy i tylko wtedy, gdy składniki są do siebie prostopadłe.

- (29) Niech (V, ξ) będzie dwuwymiarową niezdegenerowaną przestrzenią ortogonalną nad ciałem F w którym $1 + 1 \neq 0$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

i) (V, ξ) jest przestrzenią izotropową;

ii) istnieje baza przestrzeni V , względem której macierz funkcjonału ξ jest równa dla pewnego $a \in F$;

iii) istnieje baza przestrzeni V , względem której macierz funkcjonału ξ jest równa ;

iv) istnieje baza przestrzeni V , względem której macierz funkcjonału ξ jest równa ;

v) $\det(x) = -c^2$ dla pewnego $c \in F^*$.

Przestrzeń (V, ξ) spełniającą powyższe warunki nazywamy **płaszczyzną hiperboliczną**.

- (30) Wykazać, że każda niezdegenerowana przestrzeń ortogonalna jest izotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera płaszczyznę hiperboliczną. (niech α będzie niezerowym wektorem izotropowym; obliczyć $\dim(Ker(\xi'(\alpha)))$; rozważyć wektor $\beta \in V \setminus Ker(\xi'(\alpha))$).

- (31) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{Q}^3, \xi)$ gdy $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = yz + xz + xy$.

- (32) Dana jest przestrzeń ortogonalna (V, ξ) nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ z bazą prostopadłą unormowaną v_1, v_2, v_3, v_4 . Znaleźć choć jedną płaszczyznę hiperboliczną U zawartą w V . Sprawdzić, czy jej uzupełnienie ortogonalne jest płaszczyzną hiperboliczną.

- (33) Wykazać, że przestrzenie ortogonalne $(\mathbb{Z}_3^3, \xi)$ i $(\mathbb{Z}_3^3, \zeta)$ są izomorficzne, gdzie $q_\xi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2$ i $q_\zeta\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = a^2 - b^2 - c^2$.
- (34) Wykazać, że jeśli $q(\alpha) = q(\beta)$, to $\alpha + \beta \perp \alpha - \beta$. Sprawdzić, że tak jest dla $\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ i $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ ze zwykłym iloczynem skalarnym i narysować punkty $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ oraz odcinki PQ , PR , RS , QS i odcinki PS , RQ . Obliczyć wektory $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{RQ}$. Wykazać, że jeśli wektory α i β są izotropowe, to dla każdych skalarów a, b wektory $a\alpha + b\beta$ i $a\alpha - b\beta$ są prostopadłe.
- (35) Wykazać, że przestrzeń ortogonalna (V, ξ) jest anizotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma podprzestrzeni zdegenerowanych.
- (36) Przestrzeń ortogonalną (V, ξ) nazywamy hiperboliczną wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona sumą prostą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych. Udowodnić, że nad ciałem o charakterystyce różnej od 2 następujące warunki są równoważne:
- (V, ξ) jest hiperboliczna ;
 - (V, ξ) jest niezdegenerowana i istnieje podprzestrzeń U przestrzeni V o własności $U = U^\perp$;
 - (V, ξ) jest niezdegenerowana i istnieją podprzestrzenie U, W przestrzeni V takie, że $V = U \oplus W$, $\xi|_{U \times U}$ jest zerowa i $\xi|_{W \times W}$ jest zerowa.
- (37) Wykazać, że izotropowa przestrzeń ortogonalna ma bazę złożoną z wektorów izotropowych (wskazówka: założyć niewprost, że zbiór wektorów izotropowych zawiera się w hiperpłaszczyźnie $\alpha^\perp$).
- (38) Znaleźć rozkład Witt'a przestrzeni $\mathbb{Z}_3^4$ ze zwykłym iloczynem skalarnym.
- (39) Udowodnić, że dla każdego przekształcenia ortogonalnego $f : (V, \xi) \rightarrow (W, \zeta)$ zachodzi inkluzja $\text{Ker}(f) \subset \text{rad}(V)$.
- (40) Sprawdzić, czy przestrzenie ortogonalne $(\mathbb{R}^2, \xi)$, $(\mathbb{R}^2, \zeta)$ w których $q_\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 - y^2$, $q_\zeta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + 2xy + y^2$ są izomorficzne.
- (41) Pokazać, że macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ są podobne nad ciałami $\mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{R}$, ale nie są podobne nad ciałami $\mathbb{Z}_3$ i $\mathbb{Q}$.
- (42) Niech A będzie symetryczną macierzą stopnia n nad ciałem F . Niech $\phi : F^n \rightarrow F^n$ będzie endomorfizmem o macierzy A w bazie kanonicznej, ζ - formą dwuliniową o macierzy A względem bazy kanonicznej, ξ - zwykłym iloczynem skalarnym. Wykazać, że:
- wektory własne endomorfizmu ϕ należące do różnych wartości własnych są prostopadłe do siebie względem ζ i względem ξ ;
 - jeśli baza $(v_1, \dots, v_n)$ przestrzeni F^n jest bazą prostopadłą zarówno dla ζ jak i dla ξ , to jest to baza złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ .

- (43) Udowodnić, że przestrzenie ortogonalne nad ciałem F , w których funkcjonały dwuliniowe mają macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy a jest sumą dwóch kwadratów elementów ciała F .

Czy macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ($\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$) są podobne nad ciałem $\mathbb{R}$? nad ciałem $\mathbb{Q}$? (Sprawdzić, że liczby 3 oraz 7 nie są sumami dwóch kwadratów liczb wymiernych).

- (44) Twierdzenie Lagrange'a głosi, że każda dodatnia liczba wymierna jest sumą czterech kwadratów liczb wymiernych. Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby wymiernej r przestrzenie ortogonalne $(\mathbb{Q}^4, \xi)$ i $(\mathbb{Q}^4, \zeta)$, w których funkcjonały dwuliniowe mają względem baz kanonicznych macierze

I oraz rI , są izomorficzne. (Wskazówka: jeśli $r = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, to zbadać wektory $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} -b \\ a \\ -d \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -d \\ -c \\ b \\ a \end{bmatrix}$ w przestrzeni z macierzą I).

- (45) Sprawdzić, czy przekształcenia $\varphi, \psi \in \text{End}(\mathbb{R}[X]_5)$:

$$\varphi(f(X)) = f(-X); \quad \psi(f(X)) = X^5 \cdot f\left(\frac{1}{X}\right)$$

są automorfizmami ortogonalnymi przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{R}[X]_5, \xi)$, jeśli

a) $\xi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt;$

b) $\xi(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 + b_4X^4 + b_5X^5) = \sum_{i=0}^5 a_i b_i$

- (46) Czy macierze $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ są podobne

a) nad ciałem liczb rzeczywistych?

b) nad ciałem liczb wymiernych?

- (47) Wykazać, że dla $a, b \in F^*$ macierze aI i bI stopnia 2 są podobne nad ciałem F wtedy i tylko wtedy, gdy ab jest sumą dwóch kwadratów w F .

- (48) Wykazać, że dla $a \in F^*$ macierze I i aI stopnia 4 są podobne nad ciałem F wtedy i tylko wtedy, gdy a jest sumą czterech kwadratów w ciele F . (Wskazówka. Porównać z zadaniem ze str. 6.)

- (49) Wykazać, że dla $a, b \in F^*$ macierze I i $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ stopnia 4 są podobne nad ciałem F wtedy

i tylko wtedy, gdy a jest sumą czterech kwadratów i ab jest sumą dwóch kwadratów..

- (50) Zbudować izomorfizm przestrzeni ortogonalnych (V, ξ) i (W, ζ) nad ciałem $\mathbb{Z}_3$ lub udowodnić, że nie są one izomorficzne:

a) ξ i ζ mają względem pewnych baz macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ odpowiednio;

- b) ξ jest zwykłym iloczynem skalarnym w $V = \mathbb{Z}_3^4$, a $q_\xi(xw_1 + yw_2 + zw_3 + tw_4) = xy + zt$ dla pewnej bazy (w_1, w_2, w_3, w_4) przestrzeni W .
- (51) Niech $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ będzie bazą prostopadłą unormowaną przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) , a $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ - dowolnym układem wektorów. Udowodnić, że macierz $P = [\xi(v_i, u_j)]$, jest macierzą przejścia od $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ do $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
- (52) Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) , jeśli:
- a) $V = \mathbb{R}^3$, a macierz funkcjonału dwuliniowego $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ w bazie $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$ jest równa
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$
- b) $V = \mathbb{R}^4$, a $q_\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = 2xz + yz - xy$;
- c) $V = \mathbb{Z}_5^3$, a macierz ξ w bazie kanonicznej jest równa
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
- (53) Znaleźć bazę prostopadłą unormowaną przestrzeni $(\mathbb{Q}^2, \xi)$ w której $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x^2 + 2y^2$. Czy ma bazę prostopadłą unormowaną przestrzeń $(\mathbb{Q}^2, \xi)$, w której $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 7x^2 + 7y^2$? (Wskazówka: zadanie str. 7)
- (54) **Metoda Jacobiego** znajdowania podobnej macierzy diagonalnej.
- a) Niech $A_i = G_\xi(v_1, \dots, v_i)$ będzie macierzą Grama układu początkowych i wektorów spośród wektorów $v_1, \dots, v_k$, a $u_1, \dots, u_k$ będą wektorami otrzymanymi z $v_1, \dots, v_k$ za pomocą ortogonalizacji Grama. Wykazać, że jeśli $v_1, \dots, v_k$ są liniowo niezależne i $\text{lin}(v_1, \dots, v_k)$ jest anizotropowa, to $G_\xi(u_1, \dots, u_k)$ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej skalary $\det(A_1), \frac{\det(A_2)}{\det(A_1)}, \frac{\det(A_3)}{\det(A_2)}, \dots, \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}$.
- b) Niech dla macierzy symetrycznej $A = [a_{ij}]$ stopnia n macierze $A_1 = [a_{11}]$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\dots$, $A_n = A$ mają wyznaczniki różne od 0. Udowodnić, że macierz A i macierz diagonalna, mająca na przekątnej skalary $\det(A_1), \frac{\det(A_2)}{\det(A_1)}, \frac{\det(A_3)}{\det(A_2)}, \dots, \frac{\det(A_n)}{\det(A_{n-1})}$ są macierzami podobnymi.
- (55) **Metoda Lagrange'a** znajdowania podobnej macierzy diagonalnej.
- Niech w niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) wzór na wartość formy kwadratowej

$$q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

w zależności od współrzędnych w bazie $(v_1, \dots, v_n)$ dany będzie wielomianem

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} X_i X_j.$$

Tworzymy ciąg wielomianów:

krok 1.

i) jeśli $a_{11} \neq 0$, to

$$(1) \quad F(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_{11} X_1^2 + \sum_{i=2}^n a_{1i} X_1 X_i + \sum_{i=2}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} X_i X_j;$$

dodając i odejmując $\left(\frac{1}{2a_{11}} \sum_{i=2}^n a_{1i} X_1 X_i \right)^2$ i oznaczając $Y_1 = X_1 + \frac{1}{2a_{11}} \sum_{i=2}^n a_{1i} X_i$, $b_1 = a_{11}$ przepisujemy wzór 1 w postaci

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + F_1(X_2, \dots, X_n)$$

$$\text{gdzie } F_1(X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} X_i X_j - a_{11} \left(\frac{1}{2a_{11}} \sum_{i=2}^n a_{1i} X_1 X_i \right)^2;$$

ii) jeśli $a_{11} = 0$, to

$$(2) \quad F(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=2}^n a_{1i} X_1 X_i + \sum_{i=2}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} X_i X_j$$

i jeśli k jest najmniejszym takim numerem, że $a_{1k} \neq 0$ (dlaczego istnieje takie k ?), to

$$\text{oznaczamy } Z_k = \sum_{i=k}^n a_{1i} X_i - X_1, \text{ wyliczamy z tej równości } X_k = \frac{1}{a_{1k}} (Z_k + X_1 - \sum_{i=k+1}^n a_{1i} X_i)$$

i wstawiamy do wielomianu F ; porządkujemy otrzymane wyrażenie doprowadzając je do postaci

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1(Z_k + X_1) + F'(X_2, \dots, X_{k-1}, Z_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$$

i to wyrażenie przekształcamy jak w przypadku i).

krok 2. po wykonaniu **kroku 1.** i uzyskaniu wyrażenia

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + F_1(X_2, \dots, X_n)$$

stosujemy **krok 1.** do wzoru $F_1(X_2, \dots, X_n)$ na wartość formy kwadratowej na wektorze z przestrzeni $\text{lin}(v_2, \dots, v_n)$; uzyskane wyrażenie $F_1(X_2, \dots, X_n) = b_2 Y_2^2 + F_2(X_3, \dots, X_n)$ wstawiamy do wzoru $F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + F_1(X_2, \dots, X_n)$ i uzyskujemy wzór

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + b_2 Y_2^2 + F_2(X_3, \dots, X_n)$$

⋮

krok m. jeśli po wykonaniu kroków 1, 2, ..., $m-1$ mamy wzór

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + \dots + b_{m-1} Y_{m-1}^2 + F_{m-1}(X_m, \dots, X_n),$$

to stosujemy **krok 1.** do wzoru $F_{m-1}(X_m, \dots, X_n)$ na wartość formy kwadratowej na podprzestrzeni $\text{lin}(v_m, \dots, v_n)$; rezultat $F_{m-1}(X_m, \dots, X_n) = b_m Y_m^2 + F_m(X_{m+1}, \dots, X_n)$ wstawiamy do

wzoru uzyskanego w kroku $m - 1$.

Ostatecznie po n krokach uzyskujemy wzór

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + \dots + b_n Y_n^2.$$

a) sprawdzić, że macierz diagonalna $\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ jest macierzą funkcjonału ξ względem pewnej bazy prostopadłej przestrzeni V ;

b) sprawdzić, że funkcjonały liniowe $f_1, \dots, f_n$ takie, że $f_i(\sum_{j=1}^n x_j v_j) = Y_i(x_1, \dots, x_n)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ tworzą bazę przestrzeni sprzężonej V^* .

Stosując metodę Jacobiego i metodę Lagrange'a znaleźć dwoma sposobami macierz funkcjonału dwuliniowego w pewnej bazie prostopadłej i porównać objętość obliczeń:

$$\text{a) } F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2; \quad \text{b) } F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$$

$$\text{c) } F(x_1, x_2, x_3) = 99x_1^2 - 12x_1 x_2 + 48x_1 x_3 + 130x_2^2 - 60x_2 x_3 + 71x_3^2;$$

$$\text{d) } F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - x_4^2 - 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 12x_2 x_3 + 2x_3 x_4;$$

$$\text{e) } F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - x_4^2 - 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 12x_2 x_3 + 2x_3 x_4 + x_2 x_5 - x_4 x_5.$$

(56) Zbudować macierz diagonalną podobną do macierzy

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nad ciałem F .

(57) Znaleźć przynajmniej jedną macierz nieosobliwą $P \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ taką, że macierz $P^T A P$ jest diagonalna, jeśli

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{e) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(58) Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n o wyrazach rzeczywistych. Podać warunek konieczny i wystarczający na to, by równanie $A = X^T X$ miało rozwiązanie $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. (Wskazówka: jakie równoważne równanie spełnia niewiadoma $Y = X^{-1}$? czy to równanie ma związek z izomorfizmami przestrzeni ortogonalnych?).

(59) Znaleźć przynajmniej jedną macierz nieosobliwą $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ taką, że $P^T P = A$, jeśli

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Czy istnieje rozwiązanie $P \in \text{GL}_3(\mathbb{Q})$?

(60) Znaleźć choć jedno rozwiązanie $X \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ równania $X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & -12 & -13 \\ -5 & -12 & 30 & 33 \\ -5 & -13 & 33 & 39 \end{bmatrix}$.

(61) Sprawdzić, że w przestrzeni F^n ze zwykłym iloczynem skalarnym

a) dla $n = 2$: wektorem prostopadłym do $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ jest $\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$;

b) dla $n = 3$: wektorem prostopadłym do $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ jest $\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$;

c) dla dowolnego n : wektorem prostopadłym do $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ jest ostatnia kolumna macierzy dołączonej do macierzy $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & * \end{bmatrix}$.