

Zestaw zadań 13: Macierze przekształceń liniowych

- (1) W przestrzeni K^3 wybrano bazy $\mathcal{A}_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ oraz $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$,

natomiast w przestrzeni K^4 wybrano bazy $\mathcal{A}_4 = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz $\mathcal{B}_4 =$

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ w bazach $\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$ ($\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$; $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$; $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$), jeżeli:

a) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + z \\ 2x + z \\ 3x - y + z \end{bmatrix}$, b) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y + z \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

c) $n = 4, m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y + 2t \\ 2x + 3y + 5z - t \\ x + z - t \end{bmatrix}$, d) $n = 4, m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y + 2t \\ 2x - 3y + 5z - t \\ x - z - t \end{bmatrix}$,

e) $n = 3, m = 4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 3y - 2z \\ x + y + z \\ 2y \\ y + z \end{bmatrix}$, f) $n = 3, m = 4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 3y - 2z \\ x + y + z \\ 2y - 3z \\ 2x + 4y + z \end{bmatrix}$,

- (2) Niech $a_0, a_1, \dots, a_m \in K$, $n, m \in \mathbb{N}$. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $\psi : K[X]_n \rightarrow K^{m+1}$ określonego wzorem:

$$\psi(w(X)) = (w(a_0), w(a_1), \dots, w(a_m))$$

dla $w(X) \in K[X]_n$ w bazach: $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ przestrzeni $K[X]_n$ wielomianów stopnia $\leq n$ oraz bazie standardowej przestrzeni K^{m+1} . Jak się ta macierz nazywa, gdy $n = m$?

- (3) Niech $V = \mathbb{R}[X]_n$, natomiast przekształcenie $\delta : V \rightarrow V$ niech przyporządkowuje wielomianowi jego pochodną. Pokazać, że δ jest endomorfizmem przestrzeni V oraz znaleźć macierz δ w bazie:

a) $(1, X, X^2, \dots, X^n)$,

b) $(1, X - c, \frac{(X-c)^2}{2!}, \dots, \frac{(X-c)^n}{n!})$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

- (4) Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni $C_0(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji rzeczywistych ciągłych rozpiętą przez $\cos x$ oraz $\sin x$, a przekształcenie δ niech będzie przekształceniem, przypisującym funkcji jej pochodną. Sprawdzić, że δ jest endomorfizmem przestrzeni V oraz znaleźć jego macierz względem bazy $(\cos x, \sin x)$.

- (5) Wybierzmy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K_2^2$ i określmy odwzorowanie $\psi : K_2^2 \rightarrow K_2^2$ wzorem $\psi(B) = BA$ dla $B \in K_2^2$. Wykazać, że ψ jest endomorfizmem przestrzeni K_2^2 i znaleźć macierz tego endomorfizmu względem bazy $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

- (6) Niech $\varphi : K^3 \rightarrow V_1$ będzie rzutem, a $\psi : K^3 \rightarrow K^3$ symetrią względem V_1 i wzdłuż V_2 , gdzie:

a) $V_1 = \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $V_2 = \text{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$,

b) $V_1 = \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $V_2 = \text{lin}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$,

c) $V_1 = \text{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2)$, $V_2 = \text{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$.

W każdym przypadku znaleźć macierz φ w bazach $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ przestrzeni K^3 oraz $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ przestrzeni V_1 . Znaleźć macierz ψ w bazach $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ oraz $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ przestrzeni K^3 . Zwrócić uwagę, że ψ jest endomorfizmem przestrzeni K^3 i znaleźć macierz tego endomorfizmu w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

(7) Niech $f : V \rightarrow W_1 \times W_2$, $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$ będzie przekształceniem liniowym z zadania 12, Zestaw ??, str. ??. Niech A_i będzie macierzą f_i w bazach $\mathcal{A}$ przestrzeni V oraz $\mathcal{B}_i$ przestrzeni W_i . Znaleźć macierz przekształcenia f w bazach $\mathcal{A}$ przestrzeni V oraz $(\mathcal{B}_1 \times \{\theta\}) \cup (\{\theta\} \times \mathcal{B}_2)$ przestrzeni $W_1 \times W_2$.

(8) Niech $\varphi : V_1 \oplus V_2 \rightarrow W$, $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2)$, będzie przekształceniem liniowym z zadania 14, Zestaw ??, str. ??. Niech A_i będzie macierzą φ_i w bazach $\mathcal{A}_i$ przestrzeni V_i oraz $\mathcal{B}$ przestrzeni W . Znaleźć macierz φ względem baz $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ przestrzeni $V_1 \oplus V_2$ oraz $\mathcal{B}$ przestrzeni W .

(9) Przekształcenie liniowe $\varphi : K^2 \rightarrow K^3$ względem baz $(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix})$ oraz $(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$

ma macierz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Znaleźć wzór (analityczny) na $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$.

(10) Endomorfizm ψ przestrzeni K ma w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Znaleźć wzór analityczny opisujący ψ .

(11) Endomorfizm ψ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma w bazie $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć

bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia ψ . Czy wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ należy do jądra ψ ? Jaki jest

obraz wektora $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(12) Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $\gamma : V \rightarrow W$ względem bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V oraz bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni W . Jak się zmieni macierz A , gdy:

a) w bazie $\mathcal{A}$ zamienimy i -ty wektor z j -tym?

b) w bazie $\mathcal{A}$ zastąpimy i -ty wektor jego iloczynem przez skalar $a \neq 0$?

c) w bazie $\mathcal{A}$ dodamy do j -tego wektora wektor i -ty pomnożony przez skalar $a \neq 0$?

d) w bazie $\mathcal{B}$ zamienimy k -ty wektor z l -tym?

e) w bazie $\mathcal{B}$ zastąpimy k -ty wektor jego iloczynem przez skalar $a \neq 0$?

f) w bazie $\mathcal{B}$ dodamy do l -tego wektora wektor k -ty pomnożony przez skalar $a \neq 0$?

(13) Niech A będzie macierzą endomorfizmu γ przestrzeni V względem bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V . Jak się zmieni macierz A , gdy:

a) w bazie $\mathcal{A}$ zamienimy i -ty wektor z j -tym?

b) w bazie $\mathcal{A}$ zastąpimy i -ty wektor jego iloczynem przez skalar $a \neq 0$?

c) w bazie $\mathcal{A}$ dodamy do j -tego wektora wektor i -ty pomnożony przez skalar $a \neq 0$?

- (14) Endomorfizm γ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ma względem bazy standardowej macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Zna-

leżć możliwie szybko macierz γ względem bazy:

a) $(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_4)$, b) $(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$.

- (15) Endomorfizm λ przestrzeni V nazywamy *homotetią*, jeżeli istnieje skalar a taki, że $\lambda(v) = av$ dla każdego $v \in V$. Wykazać, że

a) λ jest homotetią $\Leftrightarrow \lambda \circ \varphi = \varphi \circ \lambda$ dla każdego $\varphi \in \text{End}(V)$,

b) λ jest homotetią $\Leftrightarrow \lambda$ ma taką samą macierz względem każdej bazy V .

- (16) Macierz przekształcenia $\varphi : K^3 \rightarrow K^3$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ma postać

a) $\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$.

Jakie własności przekształcenia φ można stąd odczytać?

- (17) Udowodnić, że macierz przekształcenia $\varphi : K^n \rightarrow K^n$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

a) ma postać $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ dla pewnej macierzy A stopnia $k \Leftrightarrow \varphi(\text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)) \subset \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$;

b) ma postać $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ dla pewnej macierzy A stopnia k i pewnej macierzy B stopnia $n - k$

$\Leftrightarrow \varphi(\text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)) \subset \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$ i $\varphi(\text{lin}(\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)) \subset \text{lin}(\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$.

- (18) W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dane są bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Oznaczmy przez $\mathcal{E}$ bazę standardową $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Znaleźć macierze przejścia od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{A}$, od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{B}$, od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{E}$ oraz od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, gdy:

a) $n = 2$, $\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix})$, $\mathcal{B} = (\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix})$;

b) $n = 3$, $\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix})$, $\mathcal{B} = (\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$;

c) $n = 4$, $\mathcal{A} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$, $\mathcal{B} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$.

W każdym z powyższych przypadków zapisać wektor $x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n$ jako kombinację liniową wektorów bazy $\mathcal{A}$.

- (19) Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będą bazami przestrzeni $\mathbb{C}^3$. Znaleźć macierz symetrii

względem $V_1 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2)$ i wzdłuż $V_2 = \text{lin}(\alpha_3)$ w bazie $\mathcal{B}$, gdy $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 =$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Podobnie dla rzutu na V_1 wzdłuż V_2 (potraktowanego jako odwzorowanie $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$).

- (20) Obliczyć współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ w bazie $(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ przestrzeni K^4 jeśli charakterystyka ciała K jest różna od 2 i od 3.

- (21) Napisać wzory na zmianę współrzędnych wektorów przy przejściu od bazy $(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix})$

do bazy $(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix})$ przestrzeni K^4 jeśli charakterystyka ciała K jest różna

od 2.

- (22) Korzystając z wzoru na zmianę macierzy endomorfizmu przy zmianie bazy znaleźć macierz przekształcenia $\varphi : K^3 \rightarrow K^3$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ wiedząc, że macierzą przekształcenia φ w bazie

a) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, b) $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.