

Zestaw zadań 12: Przekształcenia liniowe

(1) Które z podanych niżej przekształceń $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ są przekształceniami liniowymi:

a) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+z \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$, b) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y+1 \\ z+2 \end{bmatrix}$,

c) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+z \\ z \end{bmatrix}$, d) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ z \\ y \end{bmatrix}$,

e) $n = 4$, $m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z-t \\ x+z-t \end{bmatrix}$,

f) $n = 4$, $m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x-3y+5z-t \\ x-z-t \end{bmatrix}$,

g) $n = m = 4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y+t \\ y+z \end{bmatrix}$,

h) $n = m = 4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y-3t \\ 2x+4y+z-2t \end{bmatrix}$,

i) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2xz \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$.

W przypadku, gdy przekształcenie φ jest przekształceniem liniowym, zbadać czy jest to monomorfizm, epimorfizm.

(2) Niech $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że $\psi : K[X]_m \rightarrow K^{n+1}$ określone wzorem:

$$\psi(w(X)) = [w(a_0), w(a_1), \dots, w(a_n)] \text{ dla } w(X) \in K[X]_m,$$

jest przekształceniem liniowym. Sprawdzić, że gdy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ są parami różne, to:

a) ψ jest na $\Leftrightarrow m \geq n$,

b) ψ jest różnowartościowe $\Leftrightarrow m \leq n$.

(3) Wykazać, że jeżeli $\varphi : K \rightarrow K$ jest przekształceniem liniowym, to istnieje $a \in K$ takie, że $\varphi(v) = av$ dla każdego $v \in K$. Dla jakich a przekształcenie dane takim wzorem jest monomorfizmem, epimorfizmem?

(4) Ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych można rozpatrywać jako przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$ (ozn. $\mathbb{C}^1$) oraz jako przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych (ozn. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$). Wykazać, że $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, jest endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, ale nie jest endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{C}^1$.

- (5) Sprawdzić, czy odwzorowanie ślad macierzy $tr : K_n^n \rightarrow K$ określone wzorem

$$tr \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

jest przekształceniem liniowym.

- (6) a) W przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$ niech U będzie podzbiorem, złożonym z ciągów spełniających warunek Cauchy'ego:

$$(a_n) \in U \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall p > N \forall q > N [|a_p - a_q| < \varepsilon].$$

Wykazać, że U jest podprzestrzenią i odwzorowanie $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ określone wzorem $\varphi((a_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ jest przekształceniem liniowym.

b) Niech $\psi : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ będzie odwzorowaniem określonym przez warunek:

$$(b_n) = \psi((a_n)) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \left[b_n = \sum_{k=1}^n a_k \right]$$

(czyli $\psi((a_n)) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$). Sprawdzić, że ψ jest przekształceniem liniowym. Czy ψ jest monomorfizmem? epimorfizmem? Czy przekształcenie odwrotne do ψ jest przekształceniem liniowym?

c) Niech $W = \psi^{-1}(U)$. Sprawdzić, że wzór

$$\sigma((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

określa odwzorowanie $\sigma : W \rightarrow \mathbb{R}$ i że σ jest przekształceniem liniowym.

Sprawdzić, że $\sigma = \varphi \circ \psi$.

- (7) Sprawdzić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b , $a < b$ odwzorowanie $C_0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ przestrzeni funkcji ciągłych określone wzorem $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ jest przekształceniem liniowym.
- (8) Symbolem $C_n(a, b)$ oznaczamy przestrzeń funkcji rzeczywistych określonych na przedziale (a, b) i mających pochodne ciągłe do rzędu n włącznie. Sprawdzić, że dla każdego $n > 0$ odwzorowanie $C_n(a, b) \rightarrow C_{n-1}(a, b)$ określone wzorem $f \mapsto f'$ jest przekształceniem liniowym. Czy jest ono epimorfizmem? monomorfizmem?
- (9) Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K , a $\varphi : V \rightarrow W$ odwzorowaniem. Wykresem odwzorowania φ nazywamy zbiór $\Gamma_\varphi = \{(v, \varphi(v)) \in V \times W : v \in V\}$. Wykazać, że φ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko, gdy Γ_φ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $V \times W$.
- (10) Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K , i niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $\widehat{\varphi} : V \rightarrow V \times W$ będzie określone wzorem $\widehat{\varphi}(v) = (v, \varphi(v))$, a $\pi : V \times W \rightarrow W$ wzorem $\pi(v, w) = w$. Sprawdzić, że $\widehat{\varphi}$ i π są przekształceniami liniowymi, $\widehat{\varphi}$ jest monomorfizmem, π jest epimorfizmem i że $\pi \circ \widehat{\varphi} = \varphi$.
- (11) Wykazać, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ istnieje przestrzeń liniowa Z oraz epimorfizm $\kappa : V \rightarrow Z$ i monomorfizm $\overline{\varphi} : Z \rightarrow W$ takie, że $\varphi = \overline{\varphi} \circ \kappa$. Dla jakiego przekształcenia liniowego φ można zamienić miejscami słowa "epimorfizm" oraz "monomorfizm"?

- (12) Przypuśćmy, że V, W_1, W_2 są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Funkcję $f : V \rightarrow W_1 \times W_2$ można zapisać przy pomocy pary funkcji $f_1 : V \rightarrow W_1$ oraz $f_2 : V \rightarrow W_2$ wzorem $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$. Wykazać, że f jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy f_1 i f_2 są przekształceniami liniowymi.
- (13) Załóżmy, że A, B, C są zbiorami, $\emptyset \neq B, C \subset A$ oraz V jest przestrzenią liniową.
- a) Pokazać, że odwzorowanie $\Phi_B : V^A \rightarrow V^B$, $f \mapsto f|_B$ dla $f \in V^A$, jest przekształceniem liniowym. Kiedy jest to epimorfizm, a kiedy monomorfizm?
- b) Z punktu (a) oraz poprzedniego zadania wynika, że $\Phi : V^A \rightarrow V^B \times V^C$ dane wzorem $\Phi(f) = (\Phi_B(f), \Phi_C(f))$ dla $f \in V$, jest przekształceniem liniowym. Kiedy Φ jest monomorfizmem, a kiedy epimorfizmem?
- (14) Niech V, V_1, V_2, W będą przestrzeniami liniowymi oraz niech $V = V_1 \oplus V_2$. Pokazać, że dla dowolnych przekształceń liniowych $\varphi_i : V_i \rightarrow W$, $i = 1, 2$, istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ takie, że $\varphi|_{V_i} = \varphi_i$. Jeżeli $V = W$ oraz $\varphi_1 = Id_{V_1}$, $\varphi_2 = -Id_{V_2}$ to φ nazywamy *symetrią względem V_1 wzdłuż (albo równoległe do) V_2* . Jeżeli natomiast $\varphi_1 = Id_{V_1}$, a φ_2 jest endomorfizmem zerowym, to φ nazywamy *rzutem przestrzeni V na V_1 wzdłuż (albo równoległe do) V_2* .
- (15) Wykazać, że:
- a) jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $V \cong V_1 \times V_2$,
- b) jeśli $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, to $V \cong V_1 \times \dots \times V_n$.
- (16) Znaleźć jądra i obrazy przekształceń liniowych z zadań 1, 3, 7 oraz 12.
- (17) Znaleźć jądro i obraz symetrii (rzutu) względem V_1 (na V_1) wzdłuż V_2 .
- (18) Przekształcenie liniowe $\varphi : K^2 \rightarrow K^3$ dane jest wzorem $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$. Wyznaczyć:
- a) obrazy podprzestrzeni: K^2 , $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,
- $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in K^2 : 2x + 3y = 0\right\}$;
- b) przeciwobrazy podprzestrzeni: K^3 , $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,
- $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$, $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in K^3 : x + y + z = 0\right\}$.
- (19) Przypuśćmy, że $\varphi : V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, X jest podprzestrzenią przestrzeni V , a Y jest podprzestrzenią przestrzeni W .
- a) Wykazać, że
- (i) $\varphi^{-1}(\varphi(X)) = X + \text{Ker}\varphi$, (ii) $\varphi(\varphi^{-1}(Y)) = Y \cap \text{Im}\varphi$.
- b) Sformułować warunek konieczny i wystarczający na to, aby
- (i) $\varphi^{-1}(\varphi(X)) = X$, (ii) $\varphi(\varphi^{-1}(Y)) = Y$.
- c) Jaki warunek musi spełniać φ , aby dla każdej podprzestrzeni X przestrzeni V zachodziła równość $\varphi^{-1}(\varphi(X)) = X$?
- d) Jaki warunek musi spełniać φ , aby dla każdej podprzestrzeni Y przestrzeni W zachodziła równość $\varphi(\varphi^{-1}(Y)) = Y$?

(20) Wiadomo, że przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ spełnia warunki:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1) &= \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3, \\ \varphi(\alpha_2) &= 4\beta_1 + 5\beta_2 + 6\beta_3, \\ \varphi(\alpha_3) &= 7\beta_1 + 8\beta_2 + 9\beta_3\end{aligned}$$

oraz że $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ jest bazą V , a $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ jest bazą W . Obliczyć wymiar obrazu i wymiar jądra przekształcenia φ .

(21) Niech φ i ψ będą odwzorowaniami $K^\infty \rightarrow K^\infty$ takimi, że:

$$\begin{aligned}\varphi((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (0, a_1, a_2, a_3, \dots), \\ \psi((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (a_2, a_3, a_4, \dots).\end{aligned}$$

a) Sprawdzić, że φ i ψ są endomorfizmami przestrzeni K^∞ .

b) Obliczyć $\varphi \circ \psi$ i $\psi \circ \varphi$.

c) Sprawdzić, czy φ lub ψ jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem.

(22) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki:

a) $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

b) $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$;

c) $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$;

d) $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

W przypadku pozytywnej odpowiedzi przeanalizować liczbę rozwiązań i znaleźć wzór przynajmniej jednego takiego przekształcenia liniowego.

(23) Skonstruować przekształcenie liniowe $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki:

$$\tau\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tau\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \tau \circ \tau = \text{id}_{\mathbb{R}^3}.$$

Wyznaczyć wzór analityczny przekształcenia τ .

(24) Znaleźć wzór analityczny:

a) symetrii przestrzeni $\mathbb{R}^2$ względem $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ i wzdłuż $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

b) symetrii przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ i wzdłuż $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

c) rzutu przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ wzdłuż $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

- d) rzutu przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ wzdłuż $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.
- (25) Podać wzór analityczny przekształcenia liniowego $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, o którym wiadomo, że $\text{Ker}\psi = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ oraz $\text{Im}\psi = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Czy rozwiązanie jest jedyne?
- (26) Przypuśćmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K , w którym $1 + 1 \neq 0$. Załóżmy, że φ oraz ψ są endomorfizmami przestrzeni V .
- Wykazać, że $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_V$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją podprzestrzenie U_1 oraz U_2 przestrzeni V takie, że φ jest symetrią względem U_1 i wzdłuż U_2 .
 - Wykazać, że $\psi \circ \psi = \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją podprzestrzenie U_1 oraz U_2 przestrzeni V takie, że ψ jest rzutem V na U_1 wzdłuż U_2 .
- (27) Załóżmy, że ciało K ma q elementów oraz $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć, ile jest
- różnych przekształceń liniowych $K^n \rightarrow K^n$;
 - różnych izomorfizmów liniowych $K^n \rightarrow K^n$,
- gdy: (i) $n = 1$, (ii) $n = 2$, (iii) $n = 3$, (iv) n jest dowolne.
- (28) Niech V będzie przestrzenią liniową nad K , a odwzorowanie $f : V \rightarrow V$ niech spełnia warunek: $f(u + v) = f(u) + f(v)$ dla dowolnych $u, v \in V$.
- Wykazać, że jeśli $K = \mathbb{Q}$ lub $K = \mathbb{Z}_p$, to f jest przekształceniem liniowym.
 - Podać przykład ciała K i przestrzeni liniowej nad nim, gdzie analogiczny rezultat nie zachodzi.
- (29) Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Przekształcenie $f : V \rightarrow W$ nazywamy jednorodnym stopnia 1, gdy $f(av) = af(v)$ dla każdych $a \in K$ oraz $v \in V$.
- Wykazać, że f jest liniowe, gdy $\dim V \leq 1$.
 - Wskazać przestrzenie V i W oraz przekształcenie $f : V \rightarrow W$ jednorodne stopnia 1 takie, że $\dim V = 2$ oraz f nie jest przekształceniem liniowym.
- (30) Ciało $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$ (ozn. $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$) oraz ciało $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$ (ozn. $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$). Wykazać, że przestrzenie $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ oraz $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ są izomorficzne.
- (31) Wykazać, że jeżeli U_1 oraz U_2 są podprzestrzeniami przestrzeni V , to
- $$(U_1 + U_2)/(U_1 \cap U_2) \cong U_1/(U_1 \cap U_2) \times U_2/(U_1 \cap U_2).$$
- (32) Niech $v_1, \dots, v_m$ będą wektorami przestrzeni V , natomiast U niech będzie podprzestrzenią przestrzeni V .
- Pokazać, że $(v_1 + U, \dots, v_m + U)$ jest liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni V/U wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{lin}(v_1, \dots, v_m) \cap U = \{\theta\}$ i $(v_1, \dots, v_m)$ jest układem liniowo niezależnym.