Zestaw zadań 11: Struktura zbioru rozwiązań układu równań liniowych

(1) Obliczyć rzędy[1] następujących macierzy (nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych):

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \\ -5 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{h) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{i) } \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{j) } \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Obliczyć rzędy następujących macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

[1]Pojęcie rzędu macierzy wprowadził Sylvester; nazwa jest późniejsza.

d) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

(3) W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 10 \\ -1 & \lambda & -6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

(4) Obliczyć rzędy następujących macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{13}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

(5) Obliczyć rzędy następujących macierzy zespolonych:

a) $\begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1+3i \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1+2i \\ 1-5i & -7-4i & 4-7i \\ 1-i & -1-2i & 2-i \\ 2+4i & 7-i & 1+7i \end{bmatrix}$.

(6) Wykazać, że $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

(7) Wykazać, że jeśli A oraz B są macierzami o tej samej liczbie wierszy, to $r([A|B]) \leq r(A) + r(B)$.

(8) Wykazać, że jeśli A oraz B są macierzami rzeczywistymi o tej samej liczbie wierszy, to $r(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2A & -5B \end{array}\right]) = r(A) + r(B)$. To samo nad $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$ i nad $\mathbb{Z}_7$.

(9) Obliczyć rzędy macierzy współczynników oraz rzędy macierzy uzupełnionych następujących układów równań nad $\mathbb{R}$. Dla każdego układu równań znaleźć układ fundamentalny (tzn. bazę przestrzeni kierunkowej zbioru rozwiązań).

(a) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} 8x+6y+5z+2t=21 \\ 3x+3y+2z+t=10 \\ 4x+2y+3z+t=8 \\ 3x+5y+z+t=15 \\ 7x+4y+5z+2t=18 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} x+y+3z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+4z-t+3w=2 \\ 3x+3y+5z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+8z-3t+9w=2 \end{cases}$; (h) $\begin{cases} 2x-y+z+2t+3w=2 \\ 6x-3y+2z+4t+5w=3 \\ 6x-3y+2z+8t+13w=9 \\ 4x-2y+z+t+2w=1 \end{cases}$;

(i) $\begin{cases} 6x+4y+5z+2t+3w=1 \\ 3x+2y+4z+t+2w=3 \\ 3x+2y-2z+t \qquad =-7 \\ 9x+6y+z+3t+2w=2 \end{cases}$.

(10) Obliczyć rzędy macierzy współczynników oraz rzędy macierzy uzupełnionych następujących układów równań nad $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_p$. Dla każdego układu równań znaleźć układ fundamentalny (tzn. bazę przestrzeni kierunkowej zbioru rozwiązań).

(a) $\begin{cases} 2x+7y+3z+t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4 \\ 9x+4y+z+7t=2 \end{cases}$, $p=11$; (b) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 9x-3y+5z+6t=4 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}$, $p=13$;

(c) $\begin{cases} 6x+3y+2z+3t+4w=5 \\ 4x+2y+z+2t+w=4 \\ 4x+2y+3z+2t+w=0 \\ 2x+y+7z+3t+2w=1 \end{cases}$, $p=11$ (d) $\begin{cases} 2x-y+3z-7t=5 \\ 6x-3y+z-4t=7 \\ 4x-2y+14z-31t=18 \end{cases}$, $p=37$

(e) $\begin{cases} x+2y+3z-2t+w=4 \\ 3x+6y+5z-4t+3w=5 \\ x+2y+7z-4t+w=11 \\ 2x+4y+2z-3t+3w=6 \end{cases}$, $p=13$ (f) $\begin{cases} 3x+2y+2z+2t=2 \\ 2x+3y+2z+5t=3 \\ 9x+y+4z-5t=1 \\ 2x+2y+3z+4t=5 \\ 7x+y+6z-t=7 \end{cases}$, $p=7$

(g) $\begin{cases} 2x+3y+z+2t=4 \\ 4x+3y+z+t=5 \\ 5x+11y+3z+2t=2 \\ 2x+5y+z+t=1 \\ x-7y-z+2t=7 \end{cases}$, $p=17$

(11) Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z, t dla których:

a) $\begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = x \\ -6y - 20z - 45t = y \\ 4y + 15z + 36t = z \\ -y - 4z - 10t = t \end{cases}$, b) $\begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = -x \\ -6y - 20z - 45t = -y \\ 4y + 15z + 36t = -z \\ -y - 4z - 10t = -t \end{cases}$, c) $t = 0$, d) $x = y$.

Znaleźć bazę podprzestrzeni rozwiązań każdego z powyższych układów równań.

(12) W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + ay + 2z = b \end{cases}$, b) $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + z + t = b \end{cases}$.

(13) W zależności od parametru $a \in \mathbb{Z}_7$ wyznaczyć wymiary podprzestrzeni rozwiązań układów równań:

a) $\begin{cases} 2x + 2y + az + t = 0 \\ x + y + 6z + at = 0 \\ x + y \qquad + 2t = 0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x + ay + 4z + 3t = 0 \\ ay + 3z + t = 0 \end{cases}$.

(14) Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{Z}_7$, układy równań liniowych U_1 oraz U_2 (nad ciałem $\mathbb{Z}_7$) mają równe zbiory rozwiązań, jeżeli

$U_1 : \begin{cases} x + 2y + 6z + 4t = 1 \\ 3x + y + 2z + t = 0 \end{cases}$ $U_2 : \begin{cases} 5x + ay \qquad + 2t = 2 \\ 3x + 5y + bz \qquad = 1 \end{cases}$

(15) W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$, c) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$.

(16) Dla jakich parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ każdy układ równań z danymi lewymi stronami ma rozwiązanie?

a) $\begin{cases} ax + by + cz + dt \\ bx - ay + dz - ct \\ cx - dy - az + bt \\ dx + cy - bz - at \end{cases}$, b) $\begin{cases} a^2x + ay + az + at \\ ax + (b^2 - 1)y + (2b + 1)z + (3b + 1)t \\ ax + (2b + 1)y + (c^2 + 5)z + (3c + 7)t \\ ax + (3b + 1)y + (3c + 7) + (d^2 + 1)t \end{cases}$.

Jak zmieni się odpowiedź, jeżeli dopuścić $a, b, c, d \in \mathbb{C}$? Podać wzory na rozwiązanie układu a) oraz b) (przy dowolnych prawych stronach równań).

(17) Jeśli $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ są wektorami przestrzeni współrzędnych K^n, to symbolem $[\alpha, \beta, \gamma, \ldots]$ oznaczamy macierz, której kolumny są utworzone ze wspórzędnych wektorów $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Dla $k \leq n$:

a) Sprawdzić, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki podzbiór $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\}$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-k}}] \neq 0.$$

b) Sprawdzić, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\}$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi równość

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0.$$

c) Zapisać oba warunki za pomocą wzorów, w których występują tylko współrzędne wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

(18) Przypuśćmy, że $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in K^n$ oraz że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są liniowo niezależne. Oznaczmy $\xi := [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\intercal$. Niech $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-k}}$ będą takie, że

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-k}}] \neq 0.$$

Pokazać, że warstwa $\alpha + lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ przestrzeni K^n jest zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} \det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \xi - \alpha, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0 \\ \det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \xi - \alpha, \ldots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0 \\ \vdots \\ \det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \xi - \alpha] = 0 \end{cases}.$$

(19) Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest:

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + lin(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix})$, b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + lin(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix})$,

c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + lin(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$, d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + lin(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$.