

Zestaw zadań 10: Baza i wymiar.

- (1) Niech $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ będzie układem niezerowych wektorów przestrzeni V . Pokazać, że układ $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \text{lin}(\beta_1) \oplus \text{lin}(\beta_2) \oplus \dots \oplus \text{lin}(\beta_n)$.
- (2) Pokazać, że wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^n$ i znaleźć współrzędne wektora β w tej bazie, jeżeli

a) $n = 3; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}.$

b) $n = 3; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$

c) $n = 4; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

- (3) Wyznaczyć bazy podprzestrzeni rozwiązań następujących układów równań (nad $\mathbb{R}$):

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$

- (4) Wyznaczyć bazę i wymiar¹ podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ gdy:

a) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};$

b) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix};$

c) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

- (5) Wybrać bazę podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \subset \mathbb{Z}_7^m$ spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, jeżeli

a) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$

b) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix};$

¹Pojęcie wymiaru przestrzeni wektorowej pochodzi od Grassmanna.

$$\begin{aligned} \text{c) } \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{d) } \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wybrać dowolne bazy powyższych podprzestrzeni, niekoniecznie spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

- (6) Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów postaci:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Pokazać, że jeśli U jest właściwą podprzestrzenią przestrzeni liniowej V , to istnieje baza przestrzeni V , której wszystkie wektory należą do $V \setminus U$.

- (7) Pokazać, że jeśli wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej V nad ciałem K , to dla dowolnych $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, wektory:

$$\text{a) } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + x\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \text{ dla } x \in K,$$

$$\text{b) } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \text{ dla } x \in K, x \neq 0$$

również tworzą bazę przestrzeni V .

- (8) Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której wektor ε_1 ma współrzędne $(1, 2, 1)$ oraz bazę, w której wektor ten ma współrzędne $(1, 1, 1)$, a wektor $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ współrzędne $(1, 0, 0)$.
- (9) Znaleźć bazę każdej z niżej wypisanych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz bazę sumy algebraicznej $U_i + U_j$, jak i części wspólnej $U_i \cap U_j$ każdej pary podprzestrzeni:

$$\text{a) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right), U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$\text{b) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right), U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right),$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$\text{c) } U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\},$$

$$U_2 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right).$$

$$\text{d) } U_1 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right), U_2 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

- (10) Niech ciało K ma q elementów. Obliczyć, ile przestrzeni K^n ma różnych
 a) wektorów, b) baz.