

Zadania z algebry liniowej ¹

ZESTAW 1/2 - Podstawowe zbiory liczbowe, podstawowe pojęcia algebraiczne

1. Podziel z resztą:
 - (a) 134 przez 26,
 - (b) -134 przez 26,
 - (c) 134 przez -26,
 - (d) -134 przez -26.
 2. Liczba 100 przy dzieleniu z resztą przez pewną liczbę b daje resztę 6 i iloraz q . Wyznacz b i q .
 3. Liczba 42157 przy dzieleniu przez pewną liczbę naturalną b daje iloraz $q = 231$. Wyznacz dzielnik b oraz resztę r .
 4. Pokazać, że jeśli a i b , ($b < a$) są liczbami naturalnymi, to $\left[\frac{a}{b}\right]$ jest ilorazem natomiast $a - \left[\frac{a}{b}\right]b$ jest resztą z dzielenia a przez b . Funkcja $[\] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ przyporządkowuje liczbie rzeczywistej x część całkowitą liczby x .
 5. Rozkładając na czynniki pierwsze liczby a oraz b wyznaczyć $\text{NWD}(a, b)$ oraz $\text{NWW}(a, b)$, jeśli:
 - (a) $a = 360$, $b = 504$,
 - (b) $a = 2520$, $b = 6600$,
 - (c) $a = 187$, $b = 533$.
 6. Wykaż, że:
 - (a) $\text{NWD}(a, 0) = a$
 - (b) $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(a - kb, b)$; w szczególności $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(b, (a)_b)$ o ile $b \neq 0$.
 - (c) $\text{NWD}(ac, bc) = c \text{NWD}(a, b)$
 - (d) jeśli $d = \text{NWD}(a, b)$, to $\text{NWD}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$
 - (e) $c | ab$, $\text{NWD}(c, a) = 1 \implies c | b$
 - (f) $a | c$, $b | c$, $\text{NWD}(a, b) = 1 \implies ab | c$.
 - (g) $\text{NWD}(a_1, \dots, a_n) = \text{NWD}(\text{NWD}(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$. Podobnie dla NWW.
- Wskazówka:*
ad e. $c | ab \wedge c | bc \implies c | \text{NWD}(ab, bc) = b$.
ad f. $ab | ac \wedge ab | bc \implies ab | \text{NWD}(ac, bc) = c$.
7. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczyć $\text{NWD}(a, b)$, jeśli:
 - (a) $a = 237$, $b = 87$,
 - (b) $a = 5720$, $b = 4370$,
 - (c) $a = 2345$, $b = 525$.
 8. Pokazać, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b zachodzi równość $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(5a + 2b, 13a + 5b)$.
 9. Rozwiąż w liczbach naturalnych następujące układy równań:
 - (a) $\begin{cases} x + y = 180 \\ \text{NWD}(x, y) = 30 \end{cases}$
 - (b) $\begin{cases} xy = 720 \\ \text{NWD}(x, y) = 4 \end{cases}$
 - (c) $\begin{cases} xy = 720 \\ \text{NWD}(x, y) = 4 \end{cases}$
 10. Zbiór A ma n elementów.
 - (a) Ile działań można określić w zbiorze A ?
 - (b) Ile działań przemiennych można określić w zbiorze A ?
 - (c) Ile działań z elementem neutralnym można określić w zbiorze A ?
 11. Zbuduj tabelki dodawania i mnożenia modulo n w zbiorze $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ dla $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.
 12. Sprawdź, czy podany układ (w którym $+$ oznacza zwykłe dodawanie liczb) jest grupą:
 - (a) $(\mathbb{R}, +)$,
 - (b) $(\mathbb{N}, +)$,
 - (c) $(\mathbb{Z}, +)$,
 - (d) $(\{0, 1\}, +)$,
 - (e) $(\langle 0; \infty \rangle, +)$.
 13. Sprawdź, czy podany układ (w którym $\cdot$ oznacza zwykłe mnożenie liczb) jest grupą:
 - (a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$,
 - (b) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$,
 - (c) $(\{1, -1\}, \cdot)$,
 - (d) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$,
 - (e) $(\{a^k : k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$.
 14. Sprawdź, czy zbiór liczb wymiernych dodatnich $\mathbb{Q}^+$ wraz z działaniem $a * b = \frac{1}{2}ab$ tworzy grupę.
 15. Niech $m > 1$ będzie liczbą naturalną. Wykaż, że zbiór $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ wraz z dodawaniem modulo m (tzn. $a \oplus b = (a + b)_m$) jest grupą abelową.
 16. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że zbiór $\mathbb{Z}_p^* = \{1, \dots, p-1\}$ wraz z mnożeniem modulo p (tzn. $a \odot b = (ab)_p$) jest grupą abelową. Zbuduj tabelki działań w grupach $\mathbb{Z}_5^*$, $\mathbb{Z}_7^*$ i $\mathbb{Z}_{11}^*$.
Wskazówka. W celu pokazania istnienia elementu odwrotnego do elementu a rozwiąż odwzorowanie $\mathbb{Z}_n^ \rightarrow \mathbb{Z}_n^*$, $x \mapsto ax$, i pokaż, że jest ono wzajemnie jednoznaczne.*

¹Uwaga. Prócz zadań w zestawach 1-13 należy poszukać odpowiednich zadań w poleconych zbiorach zadań [7] oraz [8]

- 17.** Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wykaż, że dla każdych $a, b, c, g \in G$ oraz $m, n \in \mathbb{Z}$ zachodzi:
- (a) $ga = gb \Rightarrow a = b$ oraz $ag = bg \Rightarrow a = b$;
 - (b) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ oraz $(a^{-1})^{-1} = a$;
 - (c) $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = a^{-1}$;
 - (d) $a^n a^m = a^{n+m}$ oraz $(a^n)^m = a^{nm}$.
- 18.** Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{R}$ z działaniem $x \circ y = x + y + 1$ jest grupą.
- 19.** W zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ określamy działanie $x \star y = x + y + xy$. Sprawdzić, że $(\mathbb{R}, \star)$ jest grupą.
- 20.** Sprawdzić, że dany zbiór ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb jest pierścieniem przemiennym.
- (a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{Z}$, (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, (e) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$,
- 21.** Pokazać, że zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ z działaniami dodawania i mnożenia modulo n jest pierścieniem przemiennym. Pokazać, że jeśli n jest liczbą pierwszą to pierścień ten jest ciałem.
- 22.** Pokaż, że zbiór $\mathbb{R}$ z działaniami $\circ$ oraz $\star$ określonymi następująco: $x \circ y = x + y + 1$, $x \star y = x + y + xy$, jest ciałem.
- 23.** Niech K będzie ciałem oraz $a, b, c \in K$, $n, m \in \mathbb{N}$. Wykaż, że:
- (a) $a + c = b + c \implies a = b$,
 - (b) $-(-a) = a$,
 - (c) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$, o ile $a \neq 0$,
 - (d) $a \cdot 0 = 0$,
 - (e) $ab = 0 \iff a = 0$ lub $b = 0$,
 - (f) $a \cdot (-b) = -ab$,
 - (g) $(-a)(-b) = ab$,
 - (h) $a(b - c) = ab - ac$.
 - (i) $ac = bc$ i $c \neq 0 \implies a = b$.
 - (j) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,
 - (k) $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.
 - (l) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, o ile $bd \neq 0$,
 - (m) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, o ile $bd \neq 0$,
 - (n) $na \pm ma = (n \pm m)a$,
 - (o) $(na) \cdot (mb) = (nm)(ab)$,
 - (p) $n(ma) = (nm)a$,
 - (q) $(ab)^n = a^n b^n$,
 - (r) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
 - (s) $(a^n)^m = a^{nm}$.
- Wskazówka. Zajrzyj do [3, rozdz. 1.4]*
- 24.** Ułożyć tabelkę funkcji:
- (a) $x \mapsto x^2$ w $\mathbb{Z}_{11}$.
 - (b) $x \mapsto x^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{13}$.
- 25.** Sprawdzić czy istnieją - i wyznaczyć, jeśli istnieją - pierwiastki kwadratowe z -1 w ciele $\mathbb{Z}_p$ dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.
- 26.** Wyznaczyć dziedzinę oraz ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto \frac{x+2}{2x-1}$ w $\mathbb{Z}_7$.
- 27.** Rozwiązać równanie:
- a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ w $\mathbb{Z}_{11}$, b) $x^2 + x + 3 = 0$ w $\mathbb{Z}_5$,
 - c) $2x^2 + 2x + 2 = 0$ w $\mathbb{Z}_{13}$, d) $2x^3 + 3x^2 + x - 4 = 0$ w $\mathbb{Z}_7$.
- 28.** Wykonać działania: $(6^2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 1) \cdot (5 \cdot 12 - 7)^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{17}$ oraz w $\mathbb{Z}_{23}$.
- 29.** Rozwiązać układ równań
- a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 9y = 4 \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{13}$ i w $\mathbb{Z}_7$ b) $\begin{cases} 5x + 4y = a \\ 4x + 3y = b \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{11}$ i w $\mathbb{Z}_5$.
- 30.** W pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_5[X]$ wykonać wskazane działanie:
- (a) $(X^3 + 2X^2 + 3X^2 + 1) + (X^4 + X^3 + 3X^2 + 2X + 2)$;
 - (b) $(2X^2 + X + 3) - (2X^4 + 3X^3 + X^2 + 3X)$;
 - (c) $(2X^3 + 2X^2 + 3)(3X^2 + X + 2)$;

(d) $(2X^4 + 3)(2X^4 + 1)$.

31. Podzielić wielomian f z resztą przez wielomian g :

(a) $f(X) = 5X^3 + 2X^2 - X - 7$, $g(X) = X^2 + 3X - 1$ w $\mathbb{R}[X]$;

(b) $f(X) = 3X^3 + 2X^2 - X - 1$, $g(X) = X^2 + 3X - 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;

(c) $f(X) = 2X^4 + X^3 + X^2 - X + 3$, $g(X) = 3X^2 + X + 4$ w $\mathbb{Z}_7[X]$;

(d) $f(X) = X^3 - 7$, $g(X) = X - 2$ w $\mathbb{Q}[X]$.

32. Dobrać liczby $a, b \in \mathbb{Z}$, aby wielomian $X^5 - 4X^3 + 2X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ przy dzieleniu przez $X - 1$ dawał resztę 1, a przy dzieleniu przez $X - 2$ resztę -5.

33. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych przy dzieleniu przez $X - 2$ daje resztę 1 zaś przy dzieleniu przez $X - 1$ daje resztę 2. Jaka resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X - 1)(X - 2)$?

34. Wielomian o współczynnikach z $\mathbb{Z}_5$ przy dzieleniu przez $X + 1$ daje resztę 2, przy dzieleniu przez $X + 2$ daje resztę 3 zaś przy dzieleniu przez $X + 3$ daje resztę 1. Jaka resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X + 1)(X + 2)(X + 3)$?

Zadania z algebry liniowej
ZESTAW 3 - Ciało liczb zespolonych

- 1.** Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniające równość:
- a) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$, b) $(2+3i)x + (4-5i)y = 6-2i$,
- c) $(4-3i)2x + (1+i)2y = 7-12i$, d) $\frac{2+i}{3-i}x + \left(\frac{4-i}{3-i}\right)^2 y = 1+i$.
- 2.** Rozwiązać układ równań:
- a) $\begin{cases} (1+i)z + (2-i)w = 2-21 \\ (1-i)z - (3+i)w = -3+3i \end{cases}$; b) $\begin{cases} (3-i)z + (4+2i)w = 2+6i \\ (4+2i)z - (2+3i)w = 5+4i \end{cases}$;
- c) $\begin{cases} \frac{z}{2-i} + \frac{w}{1+i} = 2 \\ \frac{5z}{(2-i)^2} + \frac{2w}{(1+i)^2} = 3 \end{cases}$.
- 3.** Obliczyć:
- a) $(1+2i)^6$, b) $(2+i)^7 + (2-i)^7$, c) $(1+2i)^5 + (1-2i)^5$.
- 4.** Rozwiązać równania:
- a) $z\bar{z} + (z-\bar{z}) = 3+2i$, b) $i(z+\bar{z}) + i(z-\bar{z}) = 2i-3$.
- 5.** Rozwiązać równania:
- a) $z^2 + 3z + 3 + i = 0$, b) $z^2 + (1+4i)z - (5+i) = 0$,
- c) $z^2 + z(1+i) + 2i = 0$, d) $(4-3i)z^2 - (2+11i)z - (5+i) = 0$.
- 6.** Rozwiązać równania:
- a) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$, b) $z^4 + (15+7i)z^2 + 8 = 0$, c) $z^4 - (18+4i)z^2 + 77-36i = 0$.
- 7.** Rozwiązać równania:
- a) $(1+i)z^2 - (3+7i)z + 10i = 0$;
- b) $(1+2i)z^2 - (-1+8i)z + (-5+5i) = 0$;
- c) $(1+2i)z^2 - (1+7i)z + (-2+6i) = 0$;
- d) $(1+i)z^2 - (1+5i)z + (-2+6i) = 0$;
- e) $(1-i)z^2 - (7+3i)z + 10i = 0$;
- f) $(1-2i)z^2 - (4+7i)z + (7+i) = 0$;
- g) $(1+i)z^2 - (3+3i)z + (4+2i) = 0$;
- 8.** Wykonać działania:
- a) $\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$, b) $\frac{a+bi}{a-bi}$, c) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^2 - (2+i)^2}$, d) $\frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$.
- 9.** Wykazać nierówności:
- a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, b) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
- 10.** Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 6x + 13$ wiedząc, że jednym z nich jest $3+2i$.
- 11.** Wykazać równość $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ i podać jej interpretację geometryczną².
- 12.** Jakie twory na płaszczyźnie zespolonej określają równania i nierówności:
- a) $|z| < 2$, b) $|z-1| = 3$, c) $|z-1-2i| \leq 3$,
- d) $1 < |z| < 5$, e) $\frac{|z-3|}{|z+1|} \geq 1$, f) $|z-c| + |z+c| = 2a$,
- g) $\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \pi$, h) $|z-i| = |z+i|$, i) $\arg \frac{z-i}{z+i} = \frac{\pi}{2}$,
- j) $\arg(z-z_0) = \phi$, ϕ dane, k) $0 \leq \text{Re}(iz) \leq 1$, l) $\text{Re}(z^2) > 1$.

²Interpretację geometryczną liczb zespolonych odkrył C. Wessel w 1799 r., a potem niezależnie J. R. Argand w 1806 r.

13. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \\ 1+i, \quad 1-i, \quad -1+i, \quad 1+i\sqrt{3}, \\ -1-i\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}-i, \quad \sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}), \quad \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6}, \\ \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

14. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

$$\cos \alpha - i \sin \alpha, \quad \sin \alpha + i \cos \alpha, \quad \sin \alpha - i \cos \alpha, \quad 1 + i \operatorname{tg} \alpha.$$

15. Dla dowolnej liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$ obliczyć:

$$\text{a) } i^n, \quad \text{b) } \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}, \quad \text{c) } (1+i)^n.$$

16. Obliczyć:

$$\text{a) } \frac{(1+i\sqrt{3})^{76} + 1}{(1-i)^{37}}, \quad \text{b) } \frac{(1-i\sqrt{3})^{32} + 5}{(1+i)^{17}}.$$

17. Wyznaczyć:

$$\sqrt{2i}, \quad \sqrt{-8i}, \quad \sqrt{3-4i}, \quad \sqrt{-15+8i}, \quad \sqrt{-3-4i}, \\ \sqrt{-11+60i}, \quad \sqrt[3]{-8i}, \quad \sqrt{-8+6i}.$$

18. Obliczyć (podając dokładne wartości części rzeczywistej i urojonej):

$$\text{(a)} \quad \frac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}, \quad \text{(b)} \quad \frac{(1-i\sqrt{3})^{42}}{(-1+i)^{31}}, \quad \text{(c)} \quad \frac{(-1+i\sqrt{3})^{36}}{(1+i)^{31}}, \quad \text{(d)} \quad \frac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}, \quad \text{(e)} \quad \frac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}, \\ \text{(f)} \quad \frac{(-1+i)^{32}}{(-\sqrt{3}+i)^{28}}, \quad \text{(g)} \quad \frac{(-1-i)^{28}}{(1-i\sqrt{3})^{20}}.$$

19. Narysować na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki z 1 stopni 3, 4, 5, 6, 7 i 8.

20. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych wyprowadzić wzory wyrażające $\sin 3x$ i $\cos 3x$ poprzez $\sin x$ i $\cos x$.

Zadania z algebry liniowej

ZESTAW 4 - Układy równań liniowych*

1. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych następujące układy równań:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases} ; \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases} ; \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases} ; \quad \text{d)} \quad \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases} ; \\ \text{e)} \quad & \begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3 \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases} ; \quad \text{f)} \quad \begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2t = 21 \\ 3x + 3y + 2z + t = 10 \\ 4x + 2y + 3z + t = 8 \\ 3x + 5y + z + t = 15 \\ 7x + 4y + 5z + 2t = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Następujące układy rozwiązać nad $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}, p = 11; \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases}, p = 13; \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 6x + 3y + 2z + 3t + 4w = 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + w = 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + w = 0 \\ 2x + y + 7z + 3t + 2w = 1 \end{cases}, p = 11 \quad \text{d)} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases}, p = 37 \\ \text{e)} \quad & \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t + w = 4 \\ 3x + 6y + 5z - 4t + 3w = 5 \\ x + 2y + 7z - 4t + w = 11 \\ 2x + 4y + 2z - 3t + 3w = 6 \end{cases}, p = 13 \quad \text{f)} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 2z + 5t = 3 \\ 9x + y + 4z - 5t = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 7x + y + 6z - t = 7 \end{cases}, p = 7 \end{aligned}$$

3. Każdy z następujących układów rozwiązać w ciałach $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x + 4y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}, \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 4x + 3z = 2 \end{cases}.$$

4. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ następujące układy równań:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} (1+i)x + 2iy - z = 3+2i \\ (3+i)x + (1-i)y + 4z = 6+i \\ 5x + y - iz = 2 \end{cases}, \quad \text{b)} \quad \begin{cases} (1+i)x + 2y - iz = 2-3i \\ 3x + iy + (2-i)z = 6+4i \\ (4+i)x + y + 3z = 6+6i \end{cases}.$$

5. Dla jakiego parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ układ równań $\begin{cases} x + 2y + 6z + 6t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y + 6z + t = \lambda \end{cases}$ nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma rozwiązanie? Rozwiązać ten układ, gdy jest to możliwe.

6. W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ rozwiązać układ równań:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 5x + 2y - z = a \end{cases}, \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ ax - y + 3z = 2 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}, \quad \text{(c)} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 1 \end{cases}.$$

7. W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Q}$ rozwiązać układy równań:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 8x + 6y + 3z + 2t = 5 \\ -12x - 3y - 3z + 3t = -6 \\ 4x + 5y + z + 4t = 3 \\ \lambda x + 4y + z + 4t = 2 \end{cases}, \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z + 4t = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6t = 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8t = 9 \\ \lambda x - 4y + 9z + 10t = 11 \end{cases}, \quad \text{c)} \quad \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = 1 \\ x + y + \lambda z + t = 1 \\ x + y + z + \lambda t = 1 \end{cases}.$$

8. Pokazać, że układ równań $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$ jest sprzeczny w ciele $\mathbb{Z}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

*Do rozwiązywania układów równań stosujemy jedynie metodę eliminacji Gaussa

Zadania z algebry liniowej
ZESTAW 5 - Działania na macierzach

1. Obliczyć iloczyny macierzy:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^2, \\ \text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3, \quad \text{(e)} \quad [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]^T \cdot [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5], \\ \text{(f)} \quad & [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5] \cdot [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]^T, \quad \text{(g)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{i} \quad (A+B)^2; \\ \text{(b)} \quad & A^2 - 2AB + B^2 \quad \text{i} \quad (A-B)^2; \\ \text{(c)} \quad & A^2 - B^2, (A-B)(A+B) \quad \text{i} \quad (A+B)(A-B). \end{aligned}$$

3. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \quad \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1} \\ 0 & a^m \end{bmatrix}, \\ \text{(e)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Jeśli $A \in K_n^n, B \in K_m^m, C \in K_n^m, D \in K_m^n$, to macierz $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array} \right]$ nazywamy macierzą klatkową o klatkach A, D, C, B .
Sprawdzić, że

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & D_1 \\ \hline C_1 & B_1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_2 & D_2 \\ \hline C_2 & B_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1A_2 + D_1C_2 & A_1D_2 + D_1B_2 \\ \hline C_1A_2 + B_1C_2 & C_1D_2 + B_1B_2 \end{array} \right].$$

5. Znaleźć wszystkie takie macierze $A \in K_2^2$, że

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A, \quad \text{(b)} \quad A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{(d)} \quad & A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(e)} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6. Niech E_{ir} oznacza macierz kwadratową stopnia n , której element o wskaźnikach i, r równy jest 1, a pozostałe elementy są równe 0. Obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & E_{ir} \cdot E_{lk}, \quad \text{(b)} \quad A \cdot E_{ir}, \quad \text{(c)} \quad E_{ir} \cdot A, \quad \text{(d)} \quad A \cdot (I_n + aE_{ir}), i \neq r, \quad \text{(e)} \quad (I_n + bE_{ir}) \cdot A, i \neq r, \\ \text{(f)} \quad & (I_n + aE_{ir})(I_n + bE_{ir}), i \neq r, \text{ gdzie } A \in K_n^n, a, b \in K. \text{ Zinterpretować (d) oraz (e) w języku operacji elementarnych wykonanych na } A. \end{aligned}$$

Zadania z algebry liniowej

ZESTAW 6 - Wyznaczniki i ich zastosowanie

1. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \\
 & \text{(e)} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } \alpha, \beta, \gamma \text{ są miarami kątów trójkąta,} \\
 & \text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{(h)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \varepsilon = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3},
 \end{aligned}$$

2. Obliczyć następujące wyznaczniki (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \\
 & \text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \\
 & \text{(g)} \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \quad \text{(h)} \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}, \quad \text{(i)} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\
 & \text{(j)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -16 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 125 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -460 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 176 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 176 \end{vmatrix}, \quad \text{(k)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. Obliczyć:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{11}, \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 11 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ 1 & 10 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{13}.
 \end{aligned}$$

4. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy stopnia n :

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}, \\
 & \text{(d)} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}, \quad \text{(e)} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}, \quad (g) \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

5. Niech $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, będzie macierzą kwadratową stopnia n . Pokazać, że $\det A$ jest liczbą całkowitą. Załóżmy dodatkowo, że $a_{ij} = \pm k$, gdzie k jest ustaloną liczbą całkowitą. Pokazać, że $2^{n-1}k^n$ dzieli $\det A$.
6. Pokazać, że jeśli A jest macierzą antysymetryczną (tzn. $A^T = -A$) stopnia nieparzystego nad $\mathbb{R}$, to jest ona osobliwa, czyli $\det A = 0$.

7. Liczby 20604, 53227, 25755, 20927 i 289 dzielą się przez 17. Pokazać (bez obliczania), że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

również dzieli się przez 17.

8. Załóżmy, że $A \in K_n^n$, $B \in K_m^m$, $D \in K_m^n$ udowodnić wzór na wyznacznik macierzy klatkowo-trójkątnej

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & B \end{bmatrix} = \det A \det B$$

Wskazówka. Zastosować indukcję względem stopnia klatki B . Zob. też Przykład 6.7 ze stron 158-159 z książki A. Białyńskiego-Biruli, *Algebra liniowa z geometrią*.

9. Wyznacznikiem Vandermonde'a (stopnia n nad ciałem K) nazywamy wyznacznik postaci

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

- (a) Obliczyć wartość wyznacznika Vandermonde'a.

Rozwiązanie: Wyprowadzimy najpierw wzór rekurencyjny. Postępujemy następująco: od n -tej kolumny odejmujemy $(n-1)$ -szą pomnożoną przez x_n , od $(n-1)$ -szej kolumny odejmujemy $(n-2)$ -gą pomnożoną przez x_n , od drugiej kolumny odejmujemy pierwszą pomnożoną przez x_n . Jako wynik otrzymujemy równość

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Po rozwinięciu względem ostatniego wiersza oraz wyłączeniu z każdego wiersza odpowiedniego czynnika przed wyznacznik otrzymujemy w wyniku

$$\begin{aligned} V_n(x_1, \dots, x_n) &= (-1)^{n+1} (x_1 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n) V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Prosty dowód indukcyjny daje w rezultacie wzór $V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k>l} (x_k - x_l)$.

- (b) Wykazać, że $V_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie $x_1, \dots, x_n$ są parami różne.

10. Rozwiązać za pomocą wzorów Cramera następujące układy równań nad ciałem $\mathbb{Q}$:

(a)
$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases},$$

(c)
$$\begin{cases} x + y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases},$$

(b)
$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases},$$

(d)
$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases},$$

$$(e) \begin{cases} y - 3z + 4t = -5 \\ x - 2z + 3t = -4 \\ 3x + 2y - 5z = 12 \\ 4x + 3y - 5z = 5 \end{cases}.$$

11. Sprawdzić, czy następujące macierze są odwracalne oraz w przypadku pozytywnej odpowiedzi obliczyć macierz odwrotną:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(e) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Rozwiązać następujące równania macierzowe:

$$(a) X \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(b) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(c) X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

13. Rozwiązać układy równań macierzowych:

$$(a) \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

14. Obliczyć $(I + aE_{ir})^{-1}$, $i \neq r$.

15. Obliczyć macierze odwrotne do macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(f) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Obliczyć macierze odwrotne do macierzy klatkowych: $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$, $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array} \right]$. Obliczyć macierze odwrotne do

następujących macierzy: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadania z algebry liniowej

ZESTAW 7 - Przestrzenie liniowe

1. Niech A będzie niepustym zbiorem oraz niech K będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy symbolem K^A zbiór wszystkich funkcji $A \rightarrow K$. Sumą funkcji $f : A \rightarrow K$ oraz funkcji $g : A \rightarrow K$ nazywamy funkcję $f + g : A \rightarrow K$ taką, że $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ dla każdego $a \in A$. Iloczynem funkcji $f : A \rightarrow K$ przez skalar x z ciała K nazywamy funkcję $xf : A \rightarrow K$ taką, że $(xf)(a) = xf(a)$ dla każdego $a \in A$. Pokazać, że tak zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem K .
2. Oznaczmy symbolem $K[X]$ zbiór wszystkich wielomianów zmiennej X o współczynnikach z ciała K . Sprawdzić, że z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez elementy ciała K , zbiór $K[X]$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K .
3. Załóżmy, że K i L są ciałami oraz $K \subset L$. Sprawdzić, że zbiór L z dodawaniem elementów ciała L i operacją mnożenia elementów ciała L przez elementy ciała K jest przestrzenią wektorową nad ciałem K .
4. Niech K będzie dowolnym ciałem oraz niech $V = K^\infty$ (zbiór wszystkich nieskończonych ciągów elementów ciała K). Określmy działania dodawania wektorów oraz mnożenia wektorów przez skalary z ciała K następująco:
$$[a_1, a_2, \dots] + [b_1, b_2, \dots] := [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots], \quad a \cdot [a_1, a_2, \dots] := [aa_1, aa_2, \dots].$$
 Pokazać, że wyżej zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią wektorową nad ciałem K .
5. Wykazać, że K_n^m z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez element ciała K jest przestrzenią wektorową nad K .
6. Niech A będzie niepustym zbiorem oraz niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K . Oznaczmy symbolem V^A zbiór wszystkich funkcji $A \rightarrow V$. Sumą funkcji $f : A \rightarrow V$ oraz funkcji $g : A \rightarrow V$ nazywamy funkcję $f + g : A \rightarrow V$ taką, że $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ dla każdego $a \in A$. Iloczynem funkcji $f : A \rightarrow K$ przez skalar x z ciała K nazywamy funkcję $xf : A \rightarrow V$ taką, że $(xf)(a) = xf(a)$ dla każdego $a \in A$. Pokazać, że tak zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem K .
7. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $V_1, V_2, \dots, V_n$ niech będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K . W zbiorze $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ określamy dodawanie następująco:
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$
 zaś mnożenie przez elementy ciała K w następujący sposób:
$$x(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (x\alpha_1, x\alpha_2, \dots, x\alpha_n)$$
 Wykaż, że tak otrzymana struktura algebraiczna jest przestrzenią wektorową nad ciałem K .
8. Wykazać, że $V = \mathbb{C}$ ze zwykłym dodawaniem jako dodawaniem wektorów i operacją mnożenia przez skalar
$$* : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, v) \mapsto z * v := \bar{z} \cdot v$$
 jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.
9. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K , $\alpha, \beta, \gamma \in V$ oraz $x, y \in K$. Udowodnić, że:
 - (a) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \implies \beta = \gamma$,
 - (b) $x\alpha = \theta \iff x = 0 \text{ lub } \alpha = \theta$,
 - (c) $x\alpha = x\beta \text{ i } x \neq 0 \implies \alpha = \beta$,
 - (d) $x\alpha = y\alpha \text{ i } \alpha \neq \theta \implies x = y$,
 - (e) $-(-\alpha) = \alpha$,
 - (f) $\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma, \quad \alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma$,
 - (g) $(-1)\alpha = -\alpha, \quad (-x)\alpha = -x\alpha, \quad (-x)(-\alpha) = x\alpha$,
 - (h) $x(\alpha - \beta) = x\alpha - x\beta, \quad (x - y)\alpha = x\alpha - y\alpha$,
10. Niech K będzie ciałem. Oznaczmy symbolem $K[X]_m$ zbiór wszystkich wielomianów należących do $K[X]$, stopnia nie większego od m . Sprawdzić, że $K[X]_m$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $K[X]$.
11. Macierz $S = [s_{ij}] \in K_n^n$ nazywamy macierzą symetryczną, gdy jej elementy s_{ij} spełniają warunki: $s_{ij} = s_{ji}$ dla każdych i, j . Macierz $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ nazywamy macierzą antysymetryczną, gdy jej elementy a_{ij} spełniają warunki: $a_{ij} = -a_{ji}$ dla każdych i, j . Sprawdzić, że każdy ze zbiorów: zbiór S_n wszystkich macierzy symetrycznych należących do K_n^n i zbiór A_n wszystkich macierzy antysymetrycznych należących do K_n^n , są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej K_n^n .
12. Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami wektorowymi:
 - (a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\}$,
 - (b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\}$,
 - (c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$,

- (d) $U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0\}$,
 (e) $U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0 \text{ i } 2x + y = 0\}$,
 (f) $U = \{[x, y, z, t] : xy = 0\}$,
 (g) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$.
- 13.** Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami liniowymi:
- (a) $U = \{[t, u, t + u, t - u] : t \leq u\}$,
 (b) $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$,
 (c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$.
- 14.** Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}_2^2$ są podprzestrzeniami liniowymi:
- (a) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in K \right\}$,
 (b) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a + b + c = 0 \right\}$,
 (c) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : ab = 0 \right\}$.
- 15.** Niech $\mathbb{R}^\infty$ będzie przestrzenią ciągów elementów ciała $\mathbb{R}$ (zob. zadanie 3 z poprzedniego zestawu). Zbadać, które spośród następujących zbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$:
- (a) $U_1 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_{i+1} = a_i + a_{i-1} \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$;
 (b) $U_2 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1}) \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$;
 (c) zbiór wszystkich ciągów $[a_1, a_2, \dots]$, których prawie wszystkie wyrazy (wszystkie wyrazy z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby) są równe zero;
 (d) zbiór wszystkich ciągów ograniczonych.
- 16.** Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ są podprzestrzeniami liniowymi:
- (a) zbiór wszystkich funkcji parzystych;
 (b) zbiór wszystkich funkcji nieparzystych;
 (c) zbiór wszystkich funkcji rosnących;
 (d) zbiór wszystkich funkcji monotonicznych;
 (e) $U = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f(0) = f(1)\}$;
 (f) $U = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f(x) = 0 \text{ dla każdego } x \in \langle 0, 1 \rangle\}$.
- 17.** Sprawdzić, które z określonych podzbiorów przestrzeni wielomianów $K[X]$ nad ciałem K są podprzestrzeniami wektorowymi:
- (a) $U = \{F \in K[X] : F(-1) = 0\}$,
 (b) $U = \{F \in K[X] : F(0) \cdot F(1) = 0\}$,
 (c) $K[X]_{10} = \{F \in K[X] : \text{st}F \leq 10\}$,
 (d) $U = \{F \in K[X] : \text{st}F = 10\}$.
- 18.** Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{Z}_3^2$ są podprzestrzeniami liniowymi:
- (a) $U = \{[0, 0], [1, 2], [2, 1]\}$,
 (b) $U = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$,
 (c) $U = \{[0, 0], [1, 2], [2, 2]\}$.
- 19.** Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni
 a) $\mathbb{Z}_2^2$; b) $\mathbb{Z}_3^2$; c) $\mathbb{Z}_2^3$.
- 20.** Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ są podprzestrzeniami liniowymi:
- (a) $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z = 0\}$,
 (b) $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,
 (c) $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z = \text{Im}z\}$.
- Który z powyższych podzbiorów jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$?
- 21.** Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ są podprzestrzeniami liniowymi:
- (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
 (b) $U = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$,
 (c) $U = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q}\}$.
- Który z powyższych podzbiorów jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$?
- 22.** Załóżmy, że U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , $\alpha, \beta \in V$ oraz $x \in K$. Wykazać, że:

- (a) jeśli $\alpha + \beta \in U$ i $\alpha \in U$, to $\beta \in U$,
 (b) jeśli $x\alpha \in U$ i $x \neq 0$, to $\alpha \in U$.
- 23.** Pokazać, że jeśli U oraz W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V , to $U \cup W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset W$ lub $W \subset U$.
- 24.** Niech W_1, W_2, W_3 będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V . Wykazać że:
- (a) $W_1 \cup W_2 \subset W_1 + W_2$;
 - (b) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$;
 - (c) $(W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3)$;
 - (d) $W_1 + W_1 = W_1$;
 - (e) $W_1 \subset W_3$ i $W_2 \subset W_3 \implies W_1 + W_2 \subset W_3$;
 - (f) $W_2 \subset W_1 \implies W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$;
 - (g) $W_2 \subset W_1 \implies W_1 + (W_2 \cap W_3) = (W_1 + W_2) \cap W_3$.

Zadania z algebry liniowej
ZESTAW 8 - Kombinacje liniowe wektorów

1. W przestrzeni V wyznaczyć kombinację liniową wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ o współczynnikach odpowiednio $a_1, \dots, a_n$, gdzie:
 - (a) $V = \mathbb{R}^3$, $n = 3$, $\alpha_1 = [1, 0, 2]$, $\alpha_2 = [-2, 3, 1]$, $\alpha_3 = [1, 2, 3]$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$;
 - (b) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $n = 3$, $\alpha_1 = [1, 0, 2, 1]$, $\alpha_2 = [2, 1, 1, 1]$, $\alpha_3 = [1, 2, 0, 0]$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$;
 - (c) $V = \mathbb{Q}_2^3$, $n = 2$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$;
 - (d) $V = \mathbb{Z}_2[X]$, $n = 4$, $\alpha_1 = X^2 + X + 1$, $\alpha_2 = X^3 + X$, $\alpha_3 = X^1 + 1$, $\alpha_4 = X^2 + 1$
 $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$.
2. W przestrzeni liniowej V wyznaczyć wszystkie kombinacje liniowe wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, gdzie:
 - (a) $V = \mathbb{Z}_2^3$, $n = 3$, $\alpha_1 = [1, 0, 1]$, $\alpha_2 = [1, 1, 1]$, $\alpha_3 = [0, 1, 0]$;
 - (b) $V = \mathbb{Z}_3^2$, $n = 2$, $\alpha_1 = [1, 0, 2]$, $\alpha_2 = [1, 1, 1]$;
 - (c) $V = (\mathbb{Z}_2)_2^2$, $n = 2$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
3. Sprawdzić, czy wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ przestrzeni V , jeśli:
 - (a) $V = \mathbb{R}^3$, $n = 3$, $\alpha_1 = [1, 0, 2]$, $\alpha_2 = [2, 1, 1]$, $\alpha_3 = [1, 2, 0]$, $\beta = [-1, -1, -1]$;
 - (b) $V = \mathbb{Z}_3^3$, $n = 3$, $\alpha_1 = [1, 0, 2]$, $\alpha_2 = [1, 1, 1]$, $\alpha_3 = [1, 2, 0]$, $\beta = [1, 1, 2]$;
 - (c) $V = \mathbb{Q}[X]$, $n = 4$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = X - 1$, $\alpha_3 = (X - 1)^2$, $\alpha_4 = (X - 1)^3$, $\beta = X^3 + X^2 + X + 1$.
4. Wyznaczyć wszystkie wartości parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie:
 - (a) $\alpha_1 = [2, 3, 5]$, $\alpha_2 = [3, 7, 8]$, $\alpha_3 = [1, -6, 1]$, $\beta = [7, -2, a]$;
 - (b) $\alpha_1 = [4, 4, 3]$, $\alpha_2 = [7, 2, 1]$, $\alpha_3 = [4, 1, 6]$, $\beta = [5, 9, a]$;
 - (c) $\alpha_1 = [3, 2, 5]$, $\alpha_2 = [2, 4, 7]$, $\alpha_3 = [5, 6, a]$, $\beta = [1, 3, 5]$;
 - (d) $\alpha_1 = [3, 2, 6]$, $\alpha_2 = [5, 1, 3]$, $\alpha_3 = [7, 3, 9]$, $\beta = [a, 2, 5]$.
5. Dla jakiej liczby zespolonej $c \in \mathbb{C}$ wektor $[1, i, i]$ jest kombinacją liniową wektorów $[c, -1 + i, 1 + i]$, $[i, -1, -c]$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$?
6. Sprawdzić, czy wektory α oraz β są kombinacjami liniowymi układu $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeżeli
 - a) $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, $\alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.
 - b) $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$, $\alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Czy zapis wektora α w postaci kombinacji liniowej układu $\mathcal{A}$ jest jednoznaczny?
7. Sprawdzić, że każda kombinacja $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ liniowa wektorów $[1, 1, 2, 1]$, $[0, 2, 2, 1]$, $[3, 0, 1, 1]$ przestrzeni $\mathbb{Z}_5^4$ spełnia równanie $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$.
8. Dla danych podzbiorów U, A przestrzeni liniowej V sprawdzić, że U jest podprzestrzenią przestrzeni V oraz $\text{lin}(A) \subset U$.
 - (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{[x_1, x_2, x_3] : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$, $A = \{[1, 0, -2], [0, 1, 1], [1, -1, -3]\}$;
 - (b) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $U = \text{Sol} \left(\begin{cases} X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_2 - 2X_3 = 0 \end{cases} \right)$, $A = \{[1, 1, 2, 2], [0, 1, 2, 1], [2, 2, 1, 1]\}$;
 - (c) $V = \mathbb{C}$ (nad $\mathbb{R}$), $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 2\text{Re } z\}$, $A = \{1 + 2i, -3 - 6i\}$.
9. Niech A, B będą podzbiórmi przestrzeni liniowej V . Pokazać, że:
 - (a) $A \subset B \implies \text{lin}(A) \subset \text{lin}(B)$,
 - (b) $A = B \implies \text{lin}(A) = \text{lin}(B)$,
 - (c) $A < V \iff \text{lin}(A) = A$,
 - (d) $\text{lin}(\text{lin}(B)) = \text{lin}(B)$,
 - (e) $\text{lin}(A \cup B) = \text{lin}(A) + \text{lin}(B)$.

10. Pokazać, że

- (a) $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \iff \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n),$
- (b) dla dowolnych $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ oraz $x \in K$, zachodzi równość

$$\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + x\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$
- (c) dla dowolnego $i = 1, \dots, n$, oraz $x \in K, x \neq 0$, zachodzi równość

$$\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$
- (d) Dla dowolnej permutacji $(i_1, \dots, i_n)$ zbioru $\{1, \dots, n\}$ zachodzi równość

$$\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}).$$

Każdą z powyższych równości udowodnić dwoma sposobami: (1) wykorzystując określenie podprzestrzeni generowanej przez zbiór, (2) wykorzystując fakt, że podprzestrzeń generowana przez zbiór A jest zbiorem wszystkich kombinacji liniowych zbioru A .

11. Wskazać skończony zbiór A rozpinający podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V , gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^3;$
- (b) $V = \mathbb{R}^4, U = \{[t+u, u, 2t, t-u] : t, u \in \mathbb{R}\};$
- (c) $V = \mathbb{Z}_3^3, U = \text{Sol}(X_1 + X_2 - X_3 = 0);$
- (d) $V = \mathbb{Q}^4, U = \text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}\right);$
- (e) $V = \mathbb{C} \text{ (nad } \mathbb{R}), U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = \text{Im } z\};$
- (f) $V = \mathbb{R}[X], U = \mathbb{R}[X]_4.$

12. Wykorzystując zadanie 10(a) wybrać z podanego zbioru rozpinającego podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V minimalny zbiór rozpinający U , gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^3, U = \text{lin}([1, 5, 7], [2, 1, 2], [-5, 2, 1]);$
- (b) $V = \mathbb{Z}_5^4, U = \text{lin}([4, 2, 3, 2], [2, 1, 2, 2], [1, 3, 0, 4], [2, 1, 4, 1]);$
- (c) $V = (\mathbb{Z}_3)_2^2, U = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$

13. Wykonując przekształcenia elementarne na zbiorze rozpinającym, znaleźć minimalny zbiór rozpinający podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V , gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^4, U = \text{lin}([1, 2, -2, 2], [0, 3, -3, 0], [-2, 5, -5, -4], [-1, 0, 0, -2], [3, -1, -1, 6]);$
- (b) $V = \mathbb{Z}_7^3, U = \text{lin}([1, 3, 3], [2, 5, 0], [2, 1, 4], [5, 2, 0]);$
- (c) $V = \mathbb{Q}^3, U = \text{lin}([1, 1, 1], [2, -1, 3], [0, 1, -5], [3, -2, 1], [6, -2, -1]).$

14. Przedstawić wektor $\alpha \in V$ w postaci sumy wektora z podprzestrzeni U i wektora z podprzestrzeni W , jeśli:

- (a) $V = \mathbb{R}^3, U = \text{lin}([1, 0, -1], [0, 1, 1]), W = \text{lin}([1, 1, 0]), \alpha = [0, 1, 1];$
- (b) $V = \mathbb{Z}_5^3, U = \text{lin}([2, 0, 1], [0, 1, 2]), W = \text{lin}([1, 1, 1], [3, 1, 2]), \alpha = [1, 2, 3];$
- (c) $V = \mathbb{R}^3, U = \text{lin}([1, 1, 1]), W = \text{Sol}(X_1 + X_2 - X_3 = 0), \alpha = [1, -1, 2];$

15. Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$, jeżeli

- (a) $U_1 = \text{Sol}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0), \text{ natomiast } U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$
- (b) $U_1 = \text{Sol}\left(\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\right), \text{ natomiast } U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$

16. Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U_1 + U_2$, lecz $\mathbb{R}^4 \neq U_1 \oplus U_2$, jeżeli $U_1 = \text{Sol}(3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0)$, zaś $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$

Do równania definiującego U_1 dołożyć jeszcze jedno równanie tak, aby nowa podprzestrzeń rozwiązań U_1' spełniała warunek $\mathbb{R}^4 = U_1' \oplus U_2$.

17. Uzasadnić, że

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

W przypadku każdej sumy prostej przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektora z pierwszego składnika sumy prostej i wektora z drugiego składnika sumy prostej.

- 18.** Niech $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (zob. zadanie 1 z poprzedniego zestawu). Zbiór funkcji nieparzystych oznaczmy literą **N**, natomiast zbiór funkcji parzystych - literą **P**. Pokazać, że **N** oraz **P** są podprzestrzeniami przestrzeni V oraz że $V = \mathbf{N} \oplus \mathbf{P}$. Przedstawić funkcję f daną wzorem

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

w postaci sumy funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

- 19.** Pokazać, że jeśli $U_1 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $U_2 = \text{lin}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$, to $U_1 + U_2 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$.
- 20.** Udowodnić, że podzbiór U jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V oraz wyznaczyć wszystkie warstwy przestrzeni V względem podprzestrzeni U , jeśli:
- (a) $V = (\mathbb{Z}_2)^3$, $U = \{[0, 0, 0], [1, 1, 1]\}$;
 - (b) $V = (\mathbb{Z}_3)^2$, $U = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$.
 - (c) $V = (\mathbb{Z}_3)^3$, $U = \text{Sol}(X_1 + X_2 + X_3 = 0)$.
- 21.** Niech K będzie ciałem skończonym oraz U niech będzie podprzestrzenią przestrzeni K^n . Wykazać, że wszystkie warstwy przestrzeni K^n względem podprzestrzeni U składają się z tej samej liczby elementów.
- 22.** Sprawdzić, czy układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny, gdzie:
- (a) $\alpha_1 = [1, 2, 3]$, $\alpha_2 = [3, 6, 7]$;
 - (b) $\alpha_1 = [4, -2, 6]$, $\alpha_2 = [6, -3, 9]$;
 - (c) $\alpha_1 = [2, -3, 1]$, $\alpha_2 = [3, -1, 5]$, $\alpha_3 = [1, -4, 3]$;
 - (d) $\alpha_1 = [2, -3, 1]$, $\alpha_2 = [3, -1, 5]$, $\alpha_3 = [1, -4, 3]$, $\alpha_4 = [1, 1, 3]$;
- 23.** Sprawdzić, czy układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni K^4 jest liniowo zależny, jeżeli:

$$\begin{aligned}(\text{a}) \quad K = \mathbb{Z}_7, \quad \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \\ (\text{b}) \quad K = \mathbb{R}, \quad \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}. \\ (\text{c}) \quad K = \mathbb{C}, \quad \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4+i \\ 0 \\ 5+3i \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2i \\ i \\ 2 \end{bmatrix}. \\ (\text{d}) \quad K = \mathbb{Z}_5, \quad \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Jeżeli to możliwe, przedstawić jeden z wektorów tego układu jako kombinację liniową pozostałych.

- 24.** Sprawdzić, czy układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wektorów przestrzeni K_2^2 jest liniowo niezależny, gdzie:

$$\begin{aligned}(\text{a}) \quad K = \mathbb{R}, \quad \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \\ (\text{b}) \quad K = \mathbb{Z}_3, \quad \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

- (c) $K = \mathbb{Z}_2$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- 25.** Sprawdzić, czy układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wektorów przestrzeni $K[X]$ jest liniowo niezależny, gdzie:
- (a) $K = \mathbb{R}$, $\alpha_1 = 2X + 1$, $\alpha_2 = X^2$, $\alpha_3 = (X + 1)^2$;
 (b) $K = \mathbb{Z}_3$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = X^3$, $\alpha_3 = (X - 1)^3$.
- 26.** Sprawdzić, czy f_1, f_2, f_3 są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, jeżeli
- (a) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \sin 2x$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 (b) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin^2 x$, $f_3(x) = \cos 2x$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- 27.** Sprawdzić, czy $1, X, X^2, \dots, X^n$ są liniowo niezależne w przestrzeni wektorowej $K[X]$. Sprawdzić, czy dla danego $a \in K$, wielomiany $1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n$ są liniowo niezależne w tej samej przestrzeni.
- 28.** Sprawdzić, czy $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, jeżeli $f_i(x) = |x - 1| \cdot |x - 2| \cdot \dots \cdot |x - i|$ dla $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.
- 29.** Sprawdzić, czy układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wektorów przestrzeni $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ jest liniowo niezależny, gdzie:
- (a) $\alpha_1 = 1 + i$, $\alpha_2 = 3 - i$,
 (b) $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = 2 - i$, $\alpha_3 = 5 - 3i$.
- 30.** Sprawdzić, że $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$.
- 31.** Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $a \in K$ dla których układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni K^3 jest liniowo zależny, jeśli:
- (a) $K = \mathbb{Z}_7$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{bmatrix}$,
 (b) $K = \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
 (c) $K = \mathbb{C}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$.
- 32.** Wykazać, że liniowo zależny jest każdy układ wektorów
- (a) zawierający wektor zerowy,
 (b) zawierający dwa wektory równe,
 (c) zawierający podukład liniowo zależny.
- 33.** Wykazać, że jeśli wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne, a wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ są liniowo zależne, to wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
- 34.** Załóżmy, że układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest liniowo niezależny. Udowodnić, że każdy z następujących układów wektorów jest liniowo niezależny:
- (a) $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, gdzie $x \neq 0$,
 (b) $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i + \alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, gdzie $x \neq 0$.
- 35.** Załóżmy, że w przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$ układ wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ jest liniowo niezależny. Sprawdzić, czy liniowo niezależny jest układ wektorów
- $$\beta_1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \quad \beta_2 = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4, \quad \beta_3 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4.$$
- 36.** Załóżmy, że w przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$ układ wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ jest liniowo niezależny. Sprawdzić, czy liniowo niezależny jest układ wektorów
- $$\beta_1 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3 - 2\alpha_4 + 4\alpha_5, \quad \beta_2 = 8\alpha_1 + 7\alpha_2 - 2\alpha_3 + 5\alpha_4 - 10\alpha_5, \quad \beta_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 8\alpha_3 - \alpha_4 + 2\alpha_5.$$
- 37.** Załóżmy, że w przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$ układ wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ jest liniowo niezależny. Sprawdzić, czy liniowo niezależny jest układ wektorów
- (a) $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, ..., $\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$;
 (b) $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, ..., $\beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n$, $\beta_n = \alpha_n + \alpha_1$.
- 38.** Wykazać, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych skalarów $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ z równości $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$ wynika, że $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.
- 39.** Pokazać, że niezerowe wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko, gdy
- $$\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1) \oplus \dots \oplus \text{lin}(\alpha_n).$$
- 40.** Pokazać, że jeśli niezerowe wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne, to dla każdego $1 \leq k < n$,
- $$\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \oplus \text{lin}(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Zadania z algebry liniowej
ZESTAW 9 - Baza przestrzeni liniowej

1. Pokazać, że wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V i znaleźć współrzędne wektora β w tej bazie, jeżeli

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha_1 = [1, 0, 1]$, $\alpha_2 = [1, 1, 0]$, $\alpha_3 = [1, 1, 1]$, $\beta = [1, 2, 3]$,
 (b) $V = \mathbb{Z}_5^3$, $\alpha_1 = [2, 1, 1]$, $\alpha_2 = [1, 3, 1]$, $\alpha_3 = [1, 1, 4]$, $\beta = [1, 1, 1]$,
 (c) $V = \mathbb{R}_2^2$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,
 (d) $V = C^2$, $\alpha_1 = [1, i]$, $\alpha_2 = [i, 1]$, $\beta = [1 + i, 2i]$;
 (e) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = X - 1$, $\alpha_3 = (X - 1)^2$, $\alpha_4 = (X - 1)^3$, $\beta = X^3 + 2X^2 + X - 1$,
 (f) $V = C$, nad $\mathbb{R}$, $\alpha_1 = 1 + i$, $\alpha_2 = 3i$,
 (g) $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, nad $\mathbb{Q}$ $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2 + \sqrt{2}$, $\beta = 1 - 2\sqrt{2}$.

2. Pokazać, że wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^n$ i znaleźć współrzędne wektora β w tej bazie, jeżeli

- (a) $n = 3$; $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$.
 (b) $n = 3$; $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$.
 (c) $n = 4$; $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ gdy:

- (a) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;
 (b) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$;
 (c) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. Wybrać bazę podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \subset \mathbb{Z}_7^m$ spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, jeżeli

- (a) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;
 (b) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$;
 (c) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$;
 (d) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Znaleźć dowolne bazy podprzestrzeni z poprzedniego zadania, stosując przekształcenia elementarne na zbiorze rozpinającym.

6. Znaleźć bazę podprzestrzeni U przestrzeni V , gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{[u, 2t, u - 2t + s, u - s] : u, t, s \in \mathbb{R}\}$,
 (b) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $U = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ i } 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$,
 (c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \text{Sol}(X_1 - 2X_2 + X_3 - 3X_4 = 0)$,
 (d) $V = \mathbb{Q}_2^2$ $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ -b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$,
 (e) $V = \mathbb{C}$, nad $\mathbb{R}$, $U = \{z \in \mathbb{C} : z + 2\bar{z} = 0\}$.

7. Wyznaczyć bazy podprzestrzeni rozwiązań następujących układów równań (nad $\mathbb{R}$):

$$(a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów postaci:

$$(a) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad (b) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

9. Pokazać, że jeśli wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej V nad ciałem K , to dla dowolnych $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, wektory:

- (a) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + x\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ dla $x \in K$,
 (b) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ dla $x \in K, x \neq 0$

również tworzą bazę przestrzeni V .

10. Pokazać, że jeśli wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej V nad ciałem K to wektory

- (a) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,
 (b) $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, \dots, \alpha_1 - \alpha_n$

również tworzą bazę przestrzeni V .

11. Załóżmy, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tworzą bazę przestrzeni V nad $\mathbb{Z}_5$. Sprawdzić czy wektory

- (a) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$,
 (b) $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$,

tworzą bazę przestrzeni V .

12. Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której wektor ε_1 ma współrzędne $(1, 2, 1)$ oraz bazę, w której wektor ten ma współrzędne $(1, 1, 1)$, a wektor $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ współrzędne $(1, 0, 0)$.

13. Niech $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ będzie układem niezerowych wektorów przestrzeni V . Pokazać, że układ $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \text{lin}(\beta_1) \oplus \text{lin}(\beta_2) \oplus \dots \oplus \text{lin}(\beta_n)$.

14. Załóżmy, że $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni V . Pokazać, że $V = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \oplus \text{lin}(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ dla każdego $1 \leq k < n$.

15. Znaleźć bazę podprzestrzeni U i W przestrzeni $\mathbb{Z}_5^3$ oraz bazę sumy $U + W$ jak i bazę części wspólnej $U \cap W$, gdzie:

- (a) $U = \text{lin}([1, 1, 2], [2, 1, 2], [3, 1, 0])$, $W = \text{Sol}(X_1 + X_2 + X_3 = 0)$,
 (b) $U = \text{lin}([3, 1, 2], [2, 1, 2], [3, 3, 1])$, $W = \text{lin}([3, 3, 2], [2, 1, 4], [3, 2, 3])$,
 (c) $U = \text{Sol}(2X_1 + 2X_2 + X_3 = 0)$, $W = \text{Sol}\left(\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 3X_3 = 0 \end{cases}\right).$

16. Znaleźć bazę każdej z niżej wypisanych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz bazę sumy algebraicznej $U_i + U_j$, jak i części wspólnej $U_i \cap U_j$ każdej pary podprzestrzeni:

$$(a) U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right), U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$(b) U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right), U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right),$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$(c) U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\},$$

$$U_2 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right).$$

$$(d) U_1 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right), U_2 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

17. Określić wymiar podprzestrzeni U przestrzeni V , gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{[u, 2s - t, t + u, u + s - t] : u, s, t \in \mathbb{R}\}$,
 (b) $V = \mathbb{R}^7$, $U = \text{Sol}(X_1 + X_7 = 0)$,
 (c) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $U = \text{lin}([1, 1, 0, 1], [2, 1, 1, 2], [0, 1, 2, 0], [1, 1, 0, 1])$,
 (d) $V = \mathbb{Z}_5^4$, $U = \text{Sol} \left(\begin{cases} 2X_1 + X_4 = 0 \\ 3X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \end{cases} \right)$,
 (e) $V = \mathbb{R}[X]$, $U = \text{lin}((X - 1)^2, (X + 1)^2, 2X)$,
 (f) $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C} : z - 2\bar{z} = 0\}$.

18. Podany układ $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni K^n dopełnić do bazy $\mathcal{B}$ wektorami bazy kanonicznej $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, gdzie:

- (a) $K = \mathbb{Q}$, $n = 4$, $\mathcal{A} = ([1, 2, 1, 1], [1, 1, 2, 1])$,
 (b) $K = \mathbb{Z}_7$, $n = 4$, $\mathcal{A} = ([1, 2, 1, 2], [3, 5, 2, 1])$,
 (c) $K = \mathbb{C}$, $n = 3$, $\mathcal{A} = ([1, i, 1], [i, 1, 1])$.

19. Załóżmy, że $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni liniowej V_1 nad ciałem K oraz $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ jest bazą przestrzeni liniowej V_2 nad ciałem K . Wykazać, że układ wektorów

$$C = ((\alpha_1, \theta), \dots, (\alpha_n, \theta), (\theta, \beta_1), \dots, (\theta, \beta_m))$$

jest bazą przestrzeni liniowej $V_1 \times V_2$. Jaki jest wymiar przestrzeni $V_1 \times V_2$?

20. Udowodnić, że jeśli V jest przestrzenią liniową n -wymiarową, to dla każdej liczby naturalnej $0 \leq k \leq n$ przestrzeń V zawiera podprzestrzeń o wymiarze k .

21. Udowodnić, że jeśli V jest przestrzenią liniową skończenie wymiarową, to dla każdej podprzestrzeni U przestrzeni V istnieje podprzestrzeń W taka, że $V = U \oplus W$. Podprzestrzeń W nazywamy *podprzestrzenią dopełniającą*.

22. W dla danej podprzestrzeni U przestrzeni V znaleźć podprzestrzeń dopełniającą, gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \text{Sol}(X_1 - 3X_3 = 0)$,
 (b) $V = \mathbb{Z}_5^4$, $U = \text{lin}([1, 2, 2, 0], [1, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 2], [2, 3, 1, 4])$,

23. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\dim(W_1 + \dots + W_n) \leq \dim W_1 + \dots + \dim W_n.$$

24. Wykazać, że jeśli K jest ciałem nieskończonym, to każda niezerowa przestrzeń liniowa nad ciałem K jest nieskończona.

25. Dla jakiej wartości parametru $a \in R$ podany układ wektorów jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

- (a) $([1, 1, 1], [1, 2, 1], [1, 0, a])$,
 (b) $([1, 2, 1], [a, 1, 1], [2, 3, 2])$.

Dla jakiej wartości parametru $a \in R$ podany układ wektorów jest bazą przestrzeni $\mathbb{Z}_3^3$:

- (a) $([1, 2, 2], [2, 2, 1], [a, 1, 0])$,
 (b) $([1, 2, 2], [a, 1, 1], [2, 3, 2])$.

Zadania z algebry liniowej

ZESTAW 10 - Struktura zbioru rozwiązań układu równań liniowych

1. Obliczyć rząd wierszowy i rząd kolumnowy macierzy

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{R}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$,

2. Obliczyć rzędy następujących macierzy (nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \\ -5 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (i) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(j) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Obliczyć rzędy następujących macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}$, (g) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

4. W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

$$(c) \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 10 \\ -1 & \lambda & -6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Obliczyć rzędy następujących macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 12 & 2 & 11 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{13}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5.$$

6. Obliczyć rzędy następujących macierzy zespolonych:

$$(a) \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1+3i \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1+2i \\ 1-5i & -7-4i & 4-7i \\ 1-i & -1-2i & 2-i \\ 2+4i & 7-i & 1+7i \end{bmatrix}.$$

7. Wykazać, że $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

8. Wykazać, że jeśli A oraz B są macierzami o tej samej liczbie wierszy, to $r([A|B]) \leq r(A) + r(B)$.

9. Wykazać, że jeśli A oraz B są macierzami rzeczywistymi o tej samej liczbie wierszy, to

$$r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B). \text{ To samo nad } \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5 \text{ i nad } \mathbb{Z}_7.$$

10. Wykazać, że rząd macierzy klatkowej postaci $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ jest równy sumie rzędów macierzy A i B .

11. Obliczając rząd odpowiedniej macierzy sprawdzić liniową niezależność układów wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ występujących w zadaniu 23 z zestawu 8.

12. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z, t dla których:

$$(a) \begin{cases} x+4y+10z+20t = x \\ -6y-20z-45t = y \\ 4y+15z+36t = z \\ -y-4z-10t = t \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x+4y+10z+20t = -x \\ -6y-20z-45t = -y \\ 4y+15z+36t = -z \\ -y-4z-10t = -t \end{cases}, \quad (c) t = 0, \quad (d) x = y.$$

Znaleźć bazę podprzestrzeni rozwiązań każdego z powyższych układów równań.

13. Znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań układu równań o n -niewiadomych nad ciałem K :

$$(a) \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_4 = 0 \end{cases}, n = 4, K = \mathbb{Q}; \quad (b) \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_4 = 0 \end{cases}, n = 7, K = \mathbb{Q};$$

$$(c) \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 - 3X_5 = 0 \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = 0 \\ 2X_4 - 3X_5 = 0 \end{cases}, n = 5, K = \mathbb{Z}_3.$$

14. W zależności od parametru a wyznaczyć wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań liniowych o n niewiadomych nad ciałem K .

$$(a) \begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + aX_3 = 0 \end{cases}, n = 3, K = \mathbb{Z}_3; \quad (b) \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0 \\ 4X_1 + aX_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases}, n = 4, K = \mathbb{Z}_5.$$

15. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych następujące układy równań. Przedstawić zbiór rozwiązań każdego układu niesprzecznego w postaci warstwy w odpowiedniej przestrzeni oraz znaleźć układ fundamentalny (tzn. bazę przestrzeni kierunkowej zbioru rozwiązań).

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases};$$

$$(c) \begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases};$$

$$(d) \begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases};$$

$$(e) \begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases};$$

$$(f) \begin{cases} 8x+6y+5z+2t=21 \\ 3x+3y+2z+t=10 \\ 4x+2y+3z+t=8 \\ 3x+5y+z+t=15 \\ 7x+4y+5z+2t=18 \end{cases};$$

$$(g) \begin{cases} x+y+3z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+4z-t+3w=2 \\ 3x+3y+5z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+8z-3t+9w=2 \end{cases};$$

$$(h) \begin{cases} 2x-y+z+2t+3w=2 \\ 6x-3y+2z+4t+5w=3 \\ 6x-3y+2z+8t+13w=9 \\ 4x-2y+z+t+2w=1 \end{cases};$$

$$(i) \begin{cases} 6x+4y+5z+2t+3w=1 \\ 3x+2y+4z+t+2w=3 \\ 3x+2y-2z+t=-7 \\ 9x+6y+z+3t+2w=2 \end{cases}.$$

16. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$ następujące układy równań. Przedstawić zbiór rozwiązań każdego układu niesprzecznego w postaci warstwy w odpowiedniej przestrzeni oraz znaleźć układ fundamentalny (tzn. bazę przestrzeni kierunkowej zbioru rozwiązań).

$$(a) \begin{cases} 2x+7y+3z+t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4 \\ 9x+4y+z+7t=2 \end{cases}, \quad p=11;$$

$$(b) \begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 9x-3y+5z+6t=4 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}, \quad p=13;$$

$$(c) \begin{cases} 6x+3y+2z+3t+4w=5 \\ 4x+2y+z+2t+w=4 \\ 4x+2y+3z+2t+w=0 \\ 2x+y+7z+3t+2w=1 \end{cases}, \quad p=11$$

$$(d) \begin{cases} 2x-y+3z-7t=5 \\ 6x-3y+z-4t=7 \\ 4x-2y+14z-31t=18 \end{cases}, \quad p=37$$

$$(e) \begin{cases} x+2y+3z-2t+w=4 \\ 3x+6y+5z-4t+3w=5 \\ x+2y+7z-4t+w=11 \\ 2x+4y+2z-3t+3w=6 \end{cases}, \quad p=13$$

$$(f) \begin{cases} 3x+2y+2z+2t=2 \\ 2x+3y+2z+5t=3 \\ 9x+y+4z-5t=1 \\ 2x+2y+3z+4t=5 \\ 7x+y+6z-t=7 \end{cases}, \quad p=7$$

$$(g) \begin{cases} 2x+3y+z+2t=4 \\ 4x+3y+z+t=5 \\ 5x+11y+3z+2t=2 \\ 2x+5y+z+t=1 \\ x-7y-z+2t=7 \end{cases}, \quad p=17$$

17. Każdy z następujących układów rozwiązać w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$. Przedstawić zbiór rozwiązań każdego układu niesprzecznego w postaci warstwy w odpowiedniej przestrzeni oraz znaleźć układ fundamentalny (tzn. bazę przestrzeni kierunkowej zbioru rozwiązań).

$$(a) \begin{cases} x+4y+3z=2 \\ 3x+2y+4z=3 \\ 4x+y+z=0 \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+4y+3z=3 \\ 4x+3z=2 \end{cases}.$$

18. Pokazać, że układ równań $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$ jest spreczny w ciele $\mathbb{Z}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p=2$.

19. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ następujące układy równań:

$$(a) \begin{cases} (1+i)x+2iy-z=3+2i \\ (3+i)x+(1-i)y+4z=6+i \\ 5x+y-iz=2 \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} (1+i)x+2y-iz=2-3i \\ 3x+iy+(2-i)z=6+4i \\ (4+i)x+y+3z=6+6i \end{cases}.$$

20. Dla jakiego parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ układ równań $\begin{cases} x+2y+6z+6t=1 \\ x+y+z+3t=2 \\ 3x+5y+6z+t=\lambda \end{cases}$ nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma rozwiązanie? Rozwiązać ten układ, gdy jest to możliwe.

21. W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Q}$ rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} 8x + 6y + 3z + 2t = 5 \\ -12x - 3y - 3z + 3t = -6 \\ 4x + 5y + z + 4t = 3 \\ \lambda x + 4y + z + 4t = 2 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} 2x - y + 3z + 4t = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6t = 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8t = 9 \\ \lambda x - 4y + 9z + 10t = 11 \end{cases}, \quad (c) \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = 1 \\ x + y + \lambda z + t = 1 \\ x + y + z + \lambda t = 1 \end{cases}.$$

22. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + ay + 2z = b \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + z + t = b \end{cases}.$$

23. W zależności od parametru $a \in \mathbb{Z}_7$ wyznaczyć wymiary podprzestrzeni rozwiązań układów równań:

$$(a) \begin{cases} 2x + 2y + az + t = 0 \\ x + y + 6z + at = 0 \\ x + y + 2t = 0 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x + ay + 4z + 3t = 0 \\ ay + 3z + t = 0 \end{cases}.$$

24. Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{Z}_7$, układy równań liniowych $\mathcal{U}_1$ oraz $\mathcal{U}_2$ (nad ciałem $\mathbb{Z}_7$) mają równe zbiory rozwiązań, jeżeli

$$\mathcal{U}_1 : \begin{cases} x + 2y + 6z + 4t = 1 \\ 3x + y + 2z + t = 0 \end{cases} \quad \mathcal{U}_2 : \begin{cases} 5x + ay + 2t = 2 \\ 3x + 5y + bz = 1 \end{cases}$$

25. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}, \quad (c) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}.$$

26. Dla jakich parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ każdy układ równań z danymi lewymi stronami ma rozwiązanie?

$$(a) \begin{cases} ax + by + cz + dt \\ bx - ay + dz - ct \\ cx - dy - az + bt \\ dx + cy - bz - at \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} a^2x + ay + az + at \\ ax + (b^2 - 1)y + (2b + 1)z + (3b + 1)t \\ ax + (2b + 1)y + (c^2 + 5)z + (3c + 7)t \\ ax + (3b + 1)y + (3c + 7)z + (d^2 + 1)t \end{cases}.$$

Jak zmieni się odpowiedź, jeżeli dopuścić $a, b, c, d \in \mathbb{C}$? Podać wzory na rozwiązanie układu (a) oraz b) (przy dowolnych prawych stronach równań).

27. Dla jakiego $a \in K$ wektor α należy do podprzestrzeni przestrzeni K^n generowanej przez wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, jeżeli

$$(a) K = \mathbb{Q}, \alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ (b) K = \mathbb{C}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} a \\ -1 + i \\ 1 + i \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -a \end{bmatrix}. \\ (c) K = \mathbb{Z}_7, \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -a \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

28. W zależności od parametru $a \in \mathbb{Z}_5$ wyznacz wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{Z}_5^5$ generowanej przez wektory

$$(a) \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ a \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ a \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

29. Jeśli $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ są wektorami przestrzeni współrzędnych K^n , to symbolem $[\alpha, \beta, \gamma, \dots]$ oznaczamy macierz, której kolumny są utworzone ze współrzędnych wektorów $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Dla $k \leq n$:

- (a) Sprawdzić, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki podzbiór $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\}$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, że

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] \neq 0.$$

- (b) Sprawdzić, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\}$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ zachodzi równość

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0.$$

- (c) Zapisać oba warunki za pomocą wzorów, w których występują tylko współrzędne wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

- 30.** Przypuśćmy, że $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in K^n$ oraz że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowo niezależne. Oznaczmy $\xi := [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Niech $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}$ będą takie, że

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] \neq 0.$$

Pokazać, że warstwa $\alpha + \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ przestrzeni K^n jest zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \xi - \alpha, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0 \\ \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \xi - \alpha, \dots, \varepsilon_{i_{n-k}}] = 0 \\ \vdots \\ \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \xi - \alpha] = 0 \end{cases}.$$

- 31.** Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{Z}_5$, którego zbiorem rozwiązań jest podprzestrzeń:

(a) $\text{lin}([2, 1, 3, 1], [1, 3, 4, 3], [1, 0, 1, 2], [0, 2, 2, 4])$,

(b) $\text{lin}([2, 1, 3, 1], [0, 1, 1, 2], [1, 0, 1, 2], [0, 2, 2, 4])$.

- 32.** Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}\right),$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$

(c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$

Zadania z algebry liniowej

ZESTAW 11 - Przekształcenia liniowe

1. Które z podanych niżej przekształceń $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ są przekształceniami liniowymi:

(a) $n = m = 3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+z \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$, (b) $n = m = 3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y+1 \\ z+2 \end{bmatrix}$,

(c) $n = m = 3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+z \\ z \end{bmatrix}$, (d) $n = m = 3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ z \\ y \end{bmatrix}$,

(e) $n = 4, m = 3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z-t \\ x+z-t \end{bmatrix}$,

(f) $n = 4, m = 3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x-3y+5z-t \\ x-z-t \end{bmatrix}$,

(g) $n = m = 4, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y+t \\ y+z \end{bmatrix}$,

(h) $n = m = 4, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y-3t \\ 2x+4y+z-2t \end{bmatrix}$,

(i) $n = m = 3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2xz \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$.

W przypadku, gdy przekształcenie φ jest przekształceniem liniowym, zbadać czy jest to monomorfizm, epimorfizm.

2. Wykazać, że jeżeli $\varphi : K \rightarrow K$ jest przekształceniem liniowym, to istnieje $a \in K$ takie, że $\varphi(v) = av$ dla każdego $v \in K$. Dla jakich a przekształcenie dane takim wzorem jest monomorfizmem, epimorfizmem?

3. Ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych można rozpatrywać jako przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$ (ozn. $\mathbb{C}^1$) oraz jako przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych (ozn. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$). Wykazać, że $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$, jest endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, ale nie jest endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{C}^1$.

4. Sprawdzić, czy odwzorowanie ślad macierzy $tr : K_n^n \rightarrow K$ określone wzorem

$$tr \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

jest przekształceniem liniowym.

5. Sprawdzić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, a < b$ odwzorowanie $C_0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ przestrzeni funkcji ciągłych określone wzorem $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ jest przekształceniem liniowym.

6. Symbolem $C_n(a, b)$ oznaczamy przestrzeń funkcji rzeczywistych określonych na przedziale (a, b) i mających pochodne ciągłe do rzędu n włącznie. Sprawdzić, że dla każdego $n > 0$ odwzorowanie $C_n(a, b) \rightarrow C_{n-1}(a, b)$ określone wzorem $f \mapsto f'$ jest przekształceniem liniowym. Czy jest ono epimorfizmem? monomorfizmem?

7. Przypuśćmy, że V, W_1, W_2 są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Funkcję $f : V \rightarrow W_1 \times W_2$ można zapisać przy pomocy pary funkcji $f_1 : V \rightarrow W_1$ oraz $f_2 : V \rightarrow W_2$ wzorem $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$. Wykazać, że f jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy f_1 i f_2 są przekształceniami liniowymi.

8. Wykazać, że:

(a) jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $V \cong V_1 \times V_2$,

(b) jeśli $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, to $V \cong V_1 \times \cdots \times V_n$.

9. Znaleźć jądra i obrazy przekształceń liniowych z zadania 1.

10. Znaleźć jądro i obraz symetrii (rzutu) względem V_1 (na V_1) wzdłuż V_2 .

11. Przekształcenie liniowe $\varphi : K^2 \rightarrow K^3$ dane jest wzorem $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix}$. Wyznaczyć:

(a) obrazy podprzestrzeni: K^2 , $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in K^2 : 2x+3y=0\right\}$;

(b) przeciwobrazy podprzestrzeni: K^3 , $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$, $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in K^3 : x+y+z=0\right\}$.

12. Przypuśćmy, że $\varphi : V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, X jest podprzestrzenią przestrzeni V , a Y jest podprzestrzenią przestrzeni W . Wykazać, że (a) $\varphi^{-1}(\varphi(X)) = X + \text{Ker}\varphi$, (b) $\varphi(\varphi^{-1}(Y)) = Y \cap \text{Im}\varphi$.

13. Wiadomo, że przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ spełnia warunki:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1) &= \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3, \\ \varphi(\alpha_2) &= 4\beta_1 + 5\beta_2 + 6\beta_3, \\ \varphi(\alpha_3) &= 7\beta_1 + 8\beta_2 + 9\beta_3\end{aligned}$$

gdzie $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ jest bazą V , zaś $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ jest bazą W . Obliczyć wymiar obrazu i wymiar jądra przekształcenia φ .

14. Niech φ i ψ będą odwzorowaniami $K^\infty \rightarrow K^\infty$ takimi, że:

$$\begin{aligned}\varphi((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (0, a_1, a_2, a_3, \dots), \\ \psi((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (a_2, a_3, a_4, \dots).\end{aligned}$$

- (a) Sprawdzić, że φ i ψ są endomorfizmami przestrzeni K^∞ .
 (b) Obliczyć $\varphi \circ \psi$ i $\psi \circ \varphi$.
 (c) Sprawdzić, czy φ lub ψ jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem.

15. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki:

(a) $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$;

(c) $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$;

(d) $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

W przypadku pozytywnej odpowiedzi przeanalizować liczbę rozwiązań i znaleźć wzór przynajmniej jednego takiego przekształcenia liniowego.

16. Skonstruować przekształcenie liniowe $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki:

$$\tau\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tau\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tau \circ \tau = \text{id}_{\mathbb{R}^3}.$$

Wyznaczyć wzór analityczny przekształcenia τ .

17. Znaleźć wzór analityczny:

- (a) symetrii przestrzeni $\mathbb{R}^2$ względem $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ i wzdłuż $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;
- (b) symetrii przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ i wzdłuż $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;
- (c) rzutu przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ wzdłuż $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;
- (d) rzutu przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ wzdłuż $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

18. Podać wzór analityczny przekształcenia liniowego $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, o którym wiadomo, że $\text{Ker}\psi = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

oraz $\text{Im}\psi = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Czy rozwiązanie jest jedyne?

19. W przestrzeni K^3 wybrano bazy

$$\mathcal{A}_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{B}_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

natomiast w przestrzeni K^4 wybrano bazy

$$\mathcal{A}_4 = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{oraz}$$

$$\mathcal{B}_4 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ w bazach $\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$ ($\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$; $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$; $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$), jeżeli:

- (a) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+z \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$, (b) $n = m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ y \\ z \end{bmatrix}$,
- (c) $n = 4, m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z-t \\ x+z-t \end{bmatrix}$, (d) $n = 4, m = 3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x-3y+5z \\ x-z-t \end{bmatrix}$,
- (e) $n = 3, m = 4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y-2z \\ x+y+z \\ 2y \\ y+z \end{bmatrix}$, (f) $n = 3, m = 4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y-2z \\ x+y+z \\ 2y-3z \\ 2x+4y+z \end{bmatrix}$.

20. Niech $V = \mathbb{R}[X]_n$, natomiast przekształcenie $\delta: V \rightarrow V$ niech przyporządkowuje wielomianowi jego pochodną. Pokazać, że δ jest endomorfizmem przestrzeni V oraz znaleźć macierz δ w bazie:

- (a) $(1, X, X^2, \dots, X^n)$,
- (b) $(1, X - c, \frac{(X-c)^2}{2!}, \dots, \frac{(X-c)^n}{n!})$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

21. Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni $C_0(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji rzeczywistych ciągłych rozpiętą przez $\cos x$ oraz $\sin x$, a przekształcenie δ niech będzie przekształceniem, przypisującym funkcji jej pochodną. Sprawdzić, że δ jest endomorfizmem przestrzeni V oraz znaleźć jego macierz względem bazy $(\cos x, \sin x)$.

22. Wybierzmy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K_2^2$ i określmy odwzorowanie $\psi: K_2^2 \rightarrow K_2^2$ wzorem $\psi(B) = BA$ dla $B \in K_2^2$. Wykazać, że ψ jest endomorfizmem przestrzeni K_2^2 i znaleźć macierz tego endomorfizmu względem bazy $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

23. Niech $\varphi : K^3 \rightarrow V_1$ będzie rzutem, a $\psi : K^3 \rightarrow K^3$ symetrią względem V_1 i wzdłuż V_2 , gdzie:

- (a) $V_1 = \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $V_2 = \text{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$,
- (b) $V_1 = \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $V_2 = \text{lin}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$,
- (c) $V_1 = \text{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2)$, $V_2 = \text{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$.

W każdym przypadku znaleźć macierz φ w bazach $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ przestrzeni K^3 oraz $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ przestrzeni V_1 . Znaleźć macierz ψ w bazach $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ oraz $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ przestrzeni K^3 . Zwrócić uwagę, że ψ jest endomorfizmem przestrzeni K^3 i znaleźć macierz tego endomorfizmu w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

24. Przekształcenie liniowe $\varphi : K^2 \rightarrow K^3$ względem baz $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ ma macierz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Znaleźć wzór (analityczny) na $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$.

25. Endomorfizm ψ przestrzeni K ma w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Znaleźć wzór analityczny opisujący ψ .

26. Endomorfizm ψ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma w bazie $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia ψ . Czy wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ należy do jądra ψ ? Jaki jest obraz wektora $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$?

27. Endomorfizm γ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ma względem bazy standardowej macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz γ względem bazy:

- (a) $(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_4)$,
- (b) $(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$.

28. Endomorfizm λ przestrzeni V nazywamy *homotetią*, jeżeli istnieje skalar a taki, że $\lambda(v) = av$ dla każdego $v \in V$. Wykazać, że

- (a) λ jest homotetią $\Leftrightarrow \lambda \circ \varphi = \varphi \circ \lambda$ dla każdego $\varphi \in \text{End}(V)$,
- (b) λ jest homotetią $\Leftrightarrow \lambda$ ma taką samą macierz względem każdej bazy V .

29. Macierz przekształcenia $\varphi : K^3 \rightarrow K^3$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ma postać

$$(a) \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Jakie własności przekształcenia φ można stąd odczytać?

30. Udowodnić, że macierz przekształcenia $\varphi : K^n \rightarrow K^n$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

- (a) ma postać $\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$ dla pewnej macierzy A stopnia $k \Leftrightarrow \varphi(\text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)) \subset \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$;
- (b) ma postać $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$ dla pewnej macierzy A stopnia k i pewnej macierzy B stopnia $n-k \Leftrightarrow \varphi(\text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)) \subset \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$ i $\varphi(\text{lin}(\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)) \subset \text{lin}(\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$.

31. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dane są bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Oznaczmy przez $\mathcal{E}$ bazę standardową $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Znaleźć macierze przejścia od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{A}$, od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{B}$, od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{E}$ oraz od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, gdy:

- (a) $n = 2$, $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$;
- (b) $n = 3$, $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$;
- (c) $n = 4$, $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

W każdym z powyższych przypadków zapisać wektor $x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n$ jako kombinację liniową wektorów bazy $\mathcal{A}$.

- 32.** Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będą bazami przestrzeni $\mathbb{C}^3$. Znaleźć macierz symetrii względem $V_1 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2)$ i wzdłuż $V_2 = \text{lin}(\alpha_3)$ w bazie $\mathcal{B}$, gdy $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Podobnie dla rzutu na V_1 wzdłuż V_2 (potraktowanego jako odwzorowanie $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$).

- 33.** Obliczyć współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ w bazie $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni K^4 jeśli charakterystyka ciała K jest różna od 2 i od 3.

- 34.** Napisać wzory na zmianę współrzędnych wektorów przy przejściu od bazy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ do bazy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni K^4 jeśli charakterystyka ciała K jest różna od 2.

- 35.** Korzystając z wzoru na zmianę macierzy endomorfizmu przy zmianie bazy znaleźć macierz przekształcenia $\varphi : K^3 \rightarrow K^3$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ wiedząc, że macierzą przekształcenia φ w bazie **(a)** $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, **(b)** $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadania z algebry liniowej

ZESTAW 12 - Wektory i wartości własne

1. Endomorfizm $\varphi \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$ ma w bazie $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right)$ macierz (a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Znaleźć wartości własne i wektory własne endomorfizmu φ . Jakie będzie rozwiązanie, jeżeli założymy, że $\mathcal{A}$ jest bazą standardową? Jakie będzie rozwiązanie, jeżeli założymy, że $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$?

2. Macierz A jest macierzą endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ w bazie standardowej. Obliczyć wartości oraz wektory własne endomorfizmu φ . Skonstruować (o ile to możliwe) bazę przestrzeni $\mathbb{C}^n$ złożoną z wektorów własnych φ . Znaleźć (o ile to możliwe) macierz $C \in GL(n, \mathbb{C})$ taką, że macierz $C^{-1}AC$ jest macierzą diagonalną.

$$n = 2: \quad \text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$n = 3: \quad \text{(e)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(f)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(g)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix},$$

$$n = 4: \quad \text{(h)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(i)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(j)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{(k)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(l)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{(m)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Obliczyć wielomian charakterystyczny endomorfizmu, który w pewnej bazie ma macierz postaci

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Czy każdy wielomian unormowany, z dokładnością do znaku, może być wielomianem charakterystycznym jakiegoś endomorfizmu?

4. Pokazać, że odwzorowanie $\varphi: \mathbb{R}[X]_2 \rightarrow \mathbb{R}[X]_2$ określone wzorem $\varphi(f(X)) = f(2X + 1)$, jest przekształceniem liniowym. Znaleźć wszystkie wartości własne endomorfizmu φ .
5. Pokazać, że odwzorowanie $\varphi: \mathbb{R}[X]_2 \rightarrow \mathbb{R}[X]_2$ określone wzorem $\varphi(f(X)) = f'(X)$, jest przekształceniem liniowym. Znaleźć wszystkie wartości własne endomorfizmu φ .
6. Znaleźć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych endomorfizmów liniowych rzeczywistych przestrzeni współrzędnych o następujących macierzach w bazie kanonicznej

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; & \text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; & \text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}; \\ \text{(e)} \quad & \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}; & \text{(f)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \text{(g)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7. Znaleźć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych endomorfizmów liniowych zespolonych przestrzeni współrzędnych o następujących macierzach w bazie kanonicznej:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \text{ dla } a \in \mathbb{R}; & \text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

8. Znaleźć wzór na elementy macierzy A^n , jeżeli $A =$

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

W każdym z przypadków obliczyć A^{2004} .

9. Znaleźć wzór na n -ty wyraz ciągu a_n , gdy

(a) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (ciąg Fibonacciego)

(b) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$.

(c) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

10. Które z endomorfizmów z zadań 2 i 6 są diagonalizowalne?

Zadania z algebry liniowej

ZESTAW 13 - Formy dwuliniowe i formy kwadratowe

1. Sprawdź, które z następujących odwzorowań są funkcjami dwuliniowymi:

- (a) $\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = xx' + x^2y',$
- (b) $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = xx' + xy' + x'y + 2zz',$
- (c) $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = xx' + xy' + zz' + 1,$
- (d) $\xi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi([x, y, z, t]^T, [x', y', z', t']^T) = xz' + x'z - 2yt' + tt',$
- (e) $\xi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi([x, y, z, t]^T, [x', y', z', t']^T) = xx' + yy' + zz' - tt',$
- (f) $\xi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = x\bar{x}' - 2\bar{y}y',$
- (g) $\xi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \xi(z, z') = 2\bar{z}z',$
- (h) $\xi : \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt,$
- (i) $\xi : \mathbb{R}_2^2 \times \mathbb{R}_2^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi(A, B) = \frac{1}{2}(\det(A+B) - \det A - \det B),$
- (j) $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = xx' + x'y + 2zz',$
- (k) $\xi : K^2 \times K^2 \rightarrow K, \quad \xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} x & y \\ x' & y' \end{bmatrix}.$

Sprawdź, które z funkcjonatów dwuliniowych są symetryczne. Dla każdego funkcjonatu liniowego zbuduj macierz w wybranej bazie przestrzeni oraz podaj wzór określający funkcjonat kwadratowy wyznaczony przez ξ .

2. Znajdź macierz funkcjonatu dwuliniowego $\xi : K^3 \times K^3 \rightarrow K, \quad \xi(\alpha, \beta) = \alpha^T \cdot \beta$ w bazie (a) jednostkowej, (b) $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$.

3. Macierz funkcjonatu dwuliniowego $\xi : R^3 \times R^3 \rightarrow R$ w bazie $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$ jest równa $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Oblicz $\xi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1), \xi(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Znajdź wzór określający ten funkcjonat. Znajdź (dwoma sposobami) macierz tego funkcjonatu: (a) w bazie jednostkowej, (b) w bazie $(\varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Oblicz rząd funkcjonatu ξ .

4. Macierz funkcjonatu dwuliniowego $\xi : R^3 \times R^3 \rightarrow R$ w bazie $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ jest równa $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Znajdź

macierz tego funkcjonatu w bazie $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$. Oblicz wartości funkcjonatu kwadratowego q_ξ na wektorach: $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

5. Niech $\xi : V \times V \rightarrow K$ będzie funkcjonatem dwuliniowym oraz $f, g \in \text{End } V$. Wykaż, że każde z następujących odwzorowań jest funkcjonatem dwuliniowym przestrzeni V :

- (a) $\xi_1 : V \times V \rightarrow K, \quad \xi_1(\alpha, \beta) = \xi(f(\alpha), \beta),$
 (b) $\xi_2 : V \times V \rightarrow K, \quad \xi_2(\alpha, \beta) = \xi(\alpha, f(\beta)),$
 (c) $\xi_3 : V \times V \rightarrow K, \quad \xi_3(\alpha, \beta) = \xi(f(\alpha), g(\beta)).$

6. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną, zaś $q = q_\xi$ funkcjonatem kwadratowym wyznaczonym przez ξ . Wykaż, że:

- (a) $\xi(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta),$
 (b) $q(\alpha + \beta) + q(\alpha - \beta) = 2(q(\alpha) + q(\beta)),$
 (c) $q(\alpha) = q(\beta) \Rightarrow \xi(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = 0,$
 (d) $q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta) + 2\xi(\alpha, \beta).$

7. Funkcjonat kwadratowy w przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{R}^2, \xi)$ wyraża się wzorem: (a) $q_\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 - y^2,$

(b) $q_\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + 2y^2,$ (c) $q_\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + 2xy + y^2.$ Znajdź wzór określający funkcjonat dwuliniowy ξ oraz macierz tego funkcjonatu w bazie jednostkowej.

8. Dane jest odwzorowanie $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = xy' + x'y - 2zz'$. Sprawdź, że $(\mathbb{R}^3, \xi)$ jest przestrzenią ortogonalną. Znajdź macierz ξ w bazie $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$. Sprawdź, czy przestrzeń $(\mathbb{R}^3, \xi)$ jest niezdegenerowana.
9. Sprawdź, czy przestrzenie ortogonalne $(\mathbb{R}^2, \xi_1)$, $(\mathbb{R}^2, \xi_2)$ gdzie: $q_{\xi_1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 - y^2$, $q_{\xi_2}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + 2xy + y^2$ są izomorficzne.
10. Które z podanych przestrzeni dwuliniowych (V, ξ) są przestrzeniami ortogonalnymi? Które z nich są niezdegenerowane? Które zaś są przestrzeniami euklidesowymi?
- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = xx' - yy'$, (b) $V = \mathbb{R}^3$, $\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = xx' + xy' + zz'$,
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, $\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = xx' + 2yy'$, (e) $V = \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$,
- (d) $V = \mathbb{R}^3$, $\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = xx' + 2xy' + 2x'y + yz' + z'y$.
11. Macierz funkcjonału dwuliniowego $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, w bazie $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$ jest równa $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Znajdź uzupełnienie ortogonalne: (a) wektora $[1, 2, 0]$, (b) podprzestrzeni $\text{lin}([1, 1, 1])$, (c) podprzestrzeni $\text{Sol}(X - Z = 0)$.
12. Znajdź bazę ortogonalną w przestrzeni ortogonalnej: (a) $(\mathbb{R}^3, \xi)$ z poprzedniego zadania, (b) $(\mathbb{R}^4, \xi)$, gdzie $q_\xi([x, y, z, t], [x', y', z', t']) = 2xz + yz - xy$, (c) $(\mathbb{Z}_5^3, \xi)$, gdzie macierz ξ w bazie jednostkowej jest równa $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
13. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \xi)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym znajdź bazę prostopadłą: (a) hiperpłaszczyzny $\text{Sol}(X - Y + Z - T = 0)$, (b) płaszczyzny $\text{lin}([1, 2, 0, -1], [0, 1, -1, 1])$, (c) ortogonalnego uzupełnienia wektora $[2, 1, 1, 2]$.
14. Znajdź dwoma sposobami macierz diagonalną podobną do macierzy (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ nad ciałem $\mathbb{R}$.
15. Znajdź przynajmniej jedną macierz nieosobliwą $P \in \mathbb{Q}_n^n$, taką że macierz $P^T A P$ jest diagonalna, jeśli:
- (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,
- (e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
16. Znajdź (o ile istnieje) choć jedną macierz odwracalną $X \in \mathbb{R}_3^3$, taką że $X^T X = A$, jeśli:
- (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.
17. Sprawdź, czy macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ są podobne nad: (a) ciałem liczb rzeczywistych, (b) ciałem liczb wymiernych, (c) ciałem liczb zespolonych.
18. Które z podanych niżej macierzy są podobne (kongruentne) nad ciałem liczb rzeczywistych, które zaś są podobne nad ciałem liczb zespolonych: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
19. Obliczyć w zależności od parametru a sygnaturę przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{R}^3, \xi)$, gdy $q_\xi([x_1, x_2, x_3]^T) =$
- (a) $5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; (b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$;
- (c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$; (d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

20. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ są izomorficzne przestrzenie ortogonalne $(\mathbb{R}^3, \xi)$ i $(\mathbb{R}^3, \eta)$, gdzie

$$\xi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

$$q_\eta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + (3-a)x_2^2 + (2-2a)x_2x_3 + (4-2a)x_3^2.$$

21. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ są izomorficzne przestrzenie ortogonalne $(\mathbb{R}^4, \xi)$ i $(\mathbb{R}^4, \eta)$, gdzie:

$$q_\xi([x, y, z, t]^T) = 2xt + 2yz,$$

$$q_\eta([x, y, z, t]^T) = (1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)x^2 + (1+a)y^2 + 2(1+a+a^2+a^3)xy + 2(1+a)xz + 2xt + 2yz.$$

22. Stosując metodę Lagrange'a i metodę Jacobi'ego znaleźć dwoma sposobami macierz funkcyjonału dwuliniowego w pewnej bazie prostopadłej przestrzeni dwuliniowej, w której forma kwadratowa zadana jest wielomianem:

(a) $F(X_1, X_2) = X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2$;

(b) $F(X_1, X_2, X_3) = 99X_1^2 - 12X_1X_2 + 48X_1X_3 + 130X_2^2 - 60X_2X_3 + 71X_3^2$;

(c) $F(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^2 + 4X_2^2 + 8X_3^2 - X_4^2 - 4X_1X_2 + 6X_1X_3 - 12X_2X_3 + 2X_3X_4$;

(d) $F(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3$;

(e) $F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = X_1^2 + 4X_2^2 + 8X_3^2 - X_4^2 - 4X_1X_2 + 6X_1X_3 - 12X_2X_3 + 2X_3X_4 + X_2X_5 - X_4X_5$.

23. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \xi)$, gdzie $q_\xi([x, y, z]) = x^2 + 2xy + y^2 + z^2$, wyznacz (dwoma sposobami) wzór określający endomorfizm sprzężony z endomorfizmem $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$, jeśli

(a) $\varphi([x, y, z]) = [x+y, z, x+z]$,

(b) $\varphi([x, y, z]) = [x+2y-z, z-x, x+y]$,

24. Sprawdź czy endomorfizm ψ jest endomorfizmem samosprzężonym w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze zwykłym iloczynem skalarnym, jeśli:

(a) $\psi([x, y, z]) = [x+2z, y, 2x+z]$;

(b) $\psi([x, y, z]) = [y, x, z]$;

(c) $\psi([x, y, z]) = [y-x, x+y+z, z]$.

25. Znajdź rzeczywistą macierz ortogonalną C taką, że C^TAC jest diagonalna, jeśli:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(e) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, (f) $A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{bmatrix}$, (g) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(h) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, (i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.