

4. WYKŁAD 4: GRUPY ROZWIĄZALNE I NILPOTENTNE.

Definicja 4.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas

- (1) ciąg podgrup grupy G zdefiniowany indukcyjnie wzorami
 - $G^{(0)} = G$,
 - $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$, dla $i \in \mathbb{N}$
 nazywamy **górnym ciągiem centralnym** grupy G , a jego elementy **hipercentralami**;
- (2) ciąg podgrup grupy G zdefiniowany indukcyjnie wzorami
 - $G_{(0)} = G$,
 - $G_{(i)} = [G, G_{(i-1)}]$, dla $i \in \mathbb{N}$
 nazywamy **dolnym ciągiem centralnym** grupy G , a jego elementy **centralami**.

Uwaga 4.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $(G^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ jej górnym ciągiem centralnym, $(G_{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ jej dolnym ciągiem centralnym. Wówczas

- (1) $G^{(i+1)} \subset G^{(i)}$, $G_{(i+1)} \subset G_{(i)}$, $G^{(i)} \triangleleft G$, $G_{(i)} \triangleleft G$, dla $i \in \mathbb{N}$;
- (2) $G^{(i)}/G^{(i+1)}$, $G_{(i)}/G_{(i+1)}$ są abelowe dla $i \in \mathbb{N}$;
- (3) $G^{(i)} \subset G_{(i)}$, dla $i \in \mathbb{N}$.

Dowód. (1) Pokażemy, że jeśli $M_1 \triangleleft G$ oraz $M_2 \triangleleft G$, to $[M_1, M_2] \triangleleft G$ i $[M_1, M_2] \subset M_1 \cap M_2$. Ustalmy w tym celu $M_1 \triangleleft G$ i $M_2 \triangleleft G$. Pierwsza teza wynika z Twierdzenia 1.2. Dla dowodu drugiej tezy ustalmy $[a_1, b_1]^{k_1} \dots [a_n, b_n]^{k_n} \in [M_1, M_2]$, gdzie $a_i \in M_1$, $b_i \in M_2$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Wówczas:

$$[a_1, b_1]^{k_1} \dots [a_n, b_n]^{k_n} = \underbrace{(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})}_{\in M_2}^{k_1} \dots \underbrace{(a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1})}_{\in M_2}^{k_n} \in M_2.$$

Podobnie $[a_1, b_1]^{k_1} \dots [a_n, b_n]^{k_n} \in M_1$.

Pokażemy, że $G^{(i)} \triangleleft G$, dla $i \in \mathbb{N}$. Dla $i = 0$ jest to oczywiste, założmy więc, że $G^{(i)} \triangleleft G$. Wobec Twierdzenia 1.2:

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \triangleleft G,$$

co dowodzi tezy na mocy indukcji względem $i \in \mathbb{N}$. Podobnie pokazujemy, że $G_{(i)} \triangleleft G$, dla $i \in \mathbb{N}$.

Pokażemy, że $G^{(i+1)} \subset G^{(i)}$, dla $i \in \mathbb{N}$. Ustalmy $i \in \mathbb{N}$. Ponieważ $G^{(i)} \triangleleft G$, mamy

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \subset G^{(i)} \cap G^{(i)} = G^{(i)}.$$

Podobnie pokazujemy, że $G_{(i)} \triangleleft G$, dla $i \in \mathbb{N}$.

- (2) Pokażemy, że $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ są abelowe, dla $i \in \mathbb{N}$. Ustalmy $i \in \mathbb{N}$. Ponieważ $G^{(i+1)} \triangleleft G$, więc $G^{(i+1)} \triangleleft G^{(i)}$. Ponadto $[G^{(i)}, G^{(i)}] \subset G^{(i+1)}$, więc wobec Wniosku 1.3 $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ jest abelowa. Podobnie pokazujemy, że $G_{(i)}/G_{(i+1)}$ są abelowe dla $i \in \mathbb{N}$.
- (3) Teza jest oczywista dla $i = 0$. Załóżmy, że dla ustalonego $i > 0$ zachodzi $G^{(i)} \subset G_{(i)}$. Wówczas:

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \subset [G, G_{(i)}] = G_{(i+1)}.$$

□

Definicja 4.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas:

- (1) jeżeli $(G_{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ jest jej dolnym ciągiem centralnym oraz $G_{(i)} = \{1\}$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, to G nazywamy **grupą nilpotentną**, a najmniejszą liczbę $i \in \mathbb{N}$, dla której $G_{(i)} = \{1\}$ **stopniem nilpotentności**;

- (2) jeżeli $(G^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ jest jej górnym ciągiem centralnym oraz $G^{(i)} = \{1\}$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, to G nazywamy **grupą rozwiązalną**, a najmniejszą liczbę $i \in \mathbb{N}$, dla której $G^{(i)} = \{1\}$ stopniem rozwiązalności.

Przykłady:

- (1) Rozważmy grupę $D(3)$. Ciąg

$$D(3) > \{I, O_{120}, O_{240}\} > \{I\}$$

jest górnym ciągiem centralnym i tym samym $D(3)$ jest rozwiązalna.

Uwaga 4.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą nilpotentną. Wówczas G jest rozwiązalna.

Dowód. Niech $(G^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ będzie górnym ciągiem centralnym G , a $(G_{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ jej dolnym ciągiem centralnym. Niech ponadto $G_{(i)} = \{1\}$. Ponieważ $G^{(i)} \subset G_{(i)}$, więc $G^{(i)} = \{1\}$ i tym samym G jest rozwiązalna. $\square$

Definicja 4.3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas:

- (1) skończony ciąg podgrup grupy G , $(G = G_0, G_1, \dots, G_n = \{1\})$, taki, że
- $G_i \triangleleft G$, dla $i \in \{0, \dots, n\}$,
- nazywamy **ciągiem normalnym** (lub **inwariantnym**) grupy G . Liczbę n nazywamy **długością ciągu**, a grupy

$$G_i/G_{i+1}, \text{ dla } i \in \{0, \dots, n-1\}$$

faktorami ciągu;

- (2) skończony ciąg podgrup grupy G , $(G = G_0, G_1, \dots, G_n = \{1\})$, taki, że
- $G_{i+1} \triangleleft G_i$, dla $i \in \{0, \dots, n-1\}$,
- nazywamy **ciągiem podnormalnym** (lub **subnormalnym**) grupy G . Liczbę n nazywamy **długością ciągu**, a grupy

$$G_i/G_{i+1}, \text{ dla } i \in \{0, \dots, n-1\}$$

faktorami ciągu.

Przykłady:

- (2) Rozważmy grupę nilpotentną G i niech

$$G = G_{(0)}, G_{(1)}, \dots, G_{(n)} = \{1\}$$

będzie jej dolnym ciągiem centralnym. Wówczas jest on ciągiem normalnym.

- (3) Rozważmy grupę nilpotentną G i niech

$$G = G^{(0)}, G^{(1)}, \dots, G^{(n)} = \{1\}$$

będzie jej górnym ciągiem centralnym. Wówczas jest on ciągiem normalnym.

Uwaga 4.3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą i niech $(G = G_0, G_1, \dots, G_n = \{1\})$ będzie jej ciągiem normalnym. Wówczas jest on ciągiem podnormalnym.

Twierdzenie 4.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą skończoną. Następujące warunki są równoważne:

- (1) G jest rozwiązalna,
- (2) istnieje ciąg $(G = G_0, G_1, \dots, G_n = \{1\})$ podnormalny o faktorach abelowych,
- (3) istnieje ciąg $(G = G_0, G_1, \dots, G_m = \{1\})$ podnormalny o faktorach cyklicznych.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): oczywiste wobec Uwagi 4.1 i Przykładu (3).

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że skończona grupa abelowa ma ciąg podnormalny o faktorach cyklicznych. Jest to oczywiste, gdy $|G| = 1$, zaś w przypadku $|G| = m$ założmy, że dla grup rzędu $|G| < m$ twierdzenie jest prawdziwe. Pokażemy, że w G istnieje ciąg podnormalny o faktorach cyklicznych. Ustalmy $a \in G \setminus \{1\}$. Niech $H = \langle a \rangle$. Wówczas H jest cykliczna oraz $|G/H| < m$ i oczywiście G/H jest abelowa. Wobec założenia indukcyjnego

$$(G/H = G'_0, G'_1, \dots, G'_n = \{1\})$$

jest ciągiem podnormalnym o faktorach cyklicznych. Niech

$$G_i = \kappa^{-1}(G'_i), \text{ dla } i \in \{1, \dots, k\} \text{ oraz } G_{k+1} = \{1\},$$

gdzie $\kappa : G \rightarrow G/H$ jest epimorfizmem kanonicznym. Wówczas ⁸

$$G_{i-1}/G_i = G'_{i-1}/G'_i, \text{ dla } i \in \{1, \dots, k\} \text{ oraz } G_k/G_{k+1} \cong H.$$

Zatem $(G = G_0, G_1, \dots, G_{k+1} = \{1\})$ jest ciągiem podnormalnym o faktorach cyklicznych i na mocy zasady indukcji matematycznej teza została udowodniona.

Niech $(G = G_0, G_1, \dots, G_k = \{1\})$ będzie ustalonym ciągiem podnormalnym o faktorach abelowych. Grupy G_{i-1}/G_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, są skończonymi grupami abelowymi. Niech

$$G_{i-1}/G_i = G'_{i,0}, G'_{i,1}, \dots, G'_{i,k_i} = \{1\}, \text{ dla } i \in \{1, \dots, k\},$$

będą ciągami podnormalnymi o faktorach cyklicznych. Niech

$$G_{i,j} = \kappa_i^{-1}(G'_{i,j}), \text{ dla } j \in \{0, \dots, k_i\}, i \in \{1, \dots, k\},$$

gdzie $\kappa_i : G_{i-1} \rightarrow G_{i-1}/G_i$ są epimorfizmami kanonicznymi. Zatem:

- $G_{i,0} = G_{i-1}$, $i \in \{1, \dots, k\}$,
- $G_{i,k_i} = G_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$,
- $G_{i,j} \triangleleft G_{i,j-1}$, dla $j \in \{0, \dots, k_i\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, ⁹
- $G_{i,j-1}/G_{i,j} \cong G'_{i,j-1}/G'_{i,j}$, dla $j \in \{0, \dots, k_i\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Zatem $(G = G_{1,0}, G_{1,1}, \dots, G_{1,k_1} = G_2 = G_{2,0}, G_{2,1}, \dots, G_{2,k_2}, \dots, G_{k,0}, \dots, G_k = \{1\})$ jest ciągiem podnormalnym o faktorach cyklicznych.

(3) $\Rightarrow$ (1): Niech $(G = G_0, G_1, \dots, G_k = \{1\})$ będzie ciągiem podnormalnym o faktorach cyklicznych. Pokażemy, że $G^{(i)} \subset G_i$, dla $i \in \{0, \dots, k\}$. Jest to oczywiste dla $i = 0$, założmy więc, że dla ustalonego $i > 0$ zachodzi $G^{(i)} \subset G_i$. Pokażemy, że $G^{(i+1)} \subset G_{i+1}$. Istotnie:

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \subset [G_i, G_i].$$

Ponieważ $G_{i+1} \triangleleft G_i$ oraz G_i/G_{i+1} jest cykliczna, a więc abelowa, więc wobec wniosku 1.3:

$$[G_i, G_i] \subset G_{i+1}.$$

□

Twierdzenie 4.2. Niech G i F będą grupami, niech $H < G$. Wówczas:

- (1) jeśli G jest abelowa, to jest nilpotentna,
- (2) jeśli G jest nilpotentna, to H jest nilpotentna,
- (3) jeśli $\phi : G \rightarrow F$ jest homomorfizmem i G jest nilpotentna, to $\phi(G)$ jest nilpotentna.

⁸Stosujemy tu następujący wniosek z twierdzenia o izomorfizmie: jeśli G jest grupą, $N \triangleleft G$ oraz $H \triangleleft G$, przy czym $N < H$, to wówczas $G/H \cong (G/N)/(H/N)$.

⁹Stosujemy tu następujący wniosek z twierdzenia o izomorfizmie: jeśli G jest grupą, $N \triangleleft G$ oraz $N < H$, to wówczas $H \triangleleft G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $H/N \triangleleft G/N$.

Dowód. (1) Niech G będzie grupą abelową. Wówczas

$$G_{(0)} = G$$

oraz wobec Wniosku 1.5:

$$G_{(1)} = [G, G_{(0)}] = [G, G] = \{1\}.$$

- (2) Niech $G = G_{(0)}, G_{(1)}, \dots, G_{(n)} = \{1\}$ będzie dolnym ciągiem centralnym grupy G , niech $(H_{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ będzie dolnym ciągiem centralnym grupy H . Pokażemy, że $H_{(i)} \subset G_{(i)}$, dla $i \in \mathbb{N}$. Jest tak oczywiście dla $i = 0$, założmy więc, że $H_{(i)} \subset G_{(i)}$ dla ustalonego $i \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że $H_{(i+1)} \subset G_{(i+1)}$. Istotnie:

$$H_{(i+1)} = [H, H_{(i)}] \subset [G, G_{(i)}] = G_{(i+1)}.$$

Zatem w szczególności $H_{(k)} = \{1\}$ i H jest nilpotentna.

- (3) Niech $G = G_{(0)}, G_{(1)}, \dots, G_{(n)} = \{1\}$ będzie dolnym ciągiem centralnym grupy G , niech $(F_{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ będzie dolnym ciągiem centralnym grupy $\phi(G)$. Pokażemy, że $\phi(G_{(i)}) = F_{(i)}$. Jest to jasne dla $i = 0$, założmy więc, że dla ustalonego $i > 0$ zachodzi $\phi(G_{(i)}) = F_{(i)}$. Pokażemy, że $\phi(G_{(i+1)}) = F_{(i+1)}$. Wobec Lematu 1.1:

$$\phi(G_{(i+1)}) = \phi([G, G_{(i)}]) = [\phi(G), \phi(G_{(i)})] = [\phi(G), F_{(i)}] = F_{(i+1)}.$$

Zatem w szczególności $F_{(k)} = \phi(\{1\}) = \{1\}$.

□

Wniosek 4.1. Niech G i F będą grupami, niech $H < G$. Wówczas:

- (1) jeśli G jest abelowa, to G jest rozwiązalna,
- (2) G jest rozwiązalna, to H jest rozwiązalna,
- (3) jeśli $\phi : G \rightarrow F$ jest homomorfizmem i G jest rozwiązalna, to $\phi(G)$ jest rozwiązalna.

Lemat 4.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H \triangleleft G$. Wówczas

G jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy H i G/H są nilpotentne.

Dowód. ($\Rightarrow$): Załóżmy, że G jest nilpotentna. Wówczas H jest nilpotentna jako podgrupa grupy nilpotentnej, a G/H jest nilpotentna jako homomorficzny obraz grupy nilpotentnej.

($\Leftarrow$): Załóżmy, że H i G/H są nilpotentne. Niech $H = H_{(0)}, H_{(1)}, \dots, H_{(n)} = \{1\}$ będzie dolnym ciągiem centralnym grupy H , niech $G/H = G'_{(0)}, G'_{(1)}, \dots, G'_{(m)} = \{1\}$ będzie dolnym ciągiem centralnym grupy G/H . Niech

$$G_i = \kappa^{-1}(G'_{(i)}), \text{ dla } i \in \{1, \dots, m\},$$

oraz

$$G_{m+i} = H_{(i)}, \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\},$$

gdzie $\kappa : G \rightarrow G/H$ jest homomorfizmem kanonicznym.

Pokażemy, że ciąg $G = G_0, G_1, \dots, G_m, G_{m+1}, \dots, G_{m+n} = \{1\}$ jest ciągiem spełniającym warunek ¹⁰

$$[G, G_{i-1}] \subset G_i, \text{ dla } i \in \{1, \dots, m+n\}.$$

Jeżeli $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$, to $G_i = H_{(i)}$ i teza jest oczywista. Jeżeli $i \in \{1, \dots, m\}$, to wobec Lematu 1.2 mamy:

$$\begin{aligned} [G, G_{i-1}] &= [\kappa^{-1}(G/H), \kappa^{-1}(G'_{(i-1)})] \subset \kappa^{-1}([G/H, G'_{(i-1)}]) \\ &= \kappa^{-1}(G'_{(i)}) = G_i. \end{aligned}$$

¹⁰Ciągi takie nazywamy też **ciągami centralnymi**.

Pozostaje wykazać, że $G_{(i)} \subset G_i$, $i \in \{1, \dots, m+n\}$. Jest to oczywiste dla $i = 0$, założmy więc, że dla ustalonego $i > 0$ zachodzi $G_{(i)} \subset G_i$. Wówczas:

$$G_{(i+1)} = [G, G_{(i)}] \subset [G, G_i] \subset G_{i+1}.$$

Zatem w szczególności $G_{(m+n)} \subset G_{m+n} = \{1\}$. □

Wniosek 4.2. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H \triangleleft G$. Wówczas*

G jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy H i G/H są rozwiązalne.

Wniosek 4.3. *Niech G_1 i G_2 będą grupami. Wówczas*

$G_1 \times G_2$ jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy G_1 i G_2 są nilpotentne.

Dowód. Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$ wzorem

$$\phi(a, b) = b.$$

Jest jasne, że ϕ jest homomorfizmem surjektywnym, a więc wobec twierdzenia o izomorfizmie $G_1 \times G_2 / \ker \phi \cong G_2$. Ponadto $\ker \phi \cong G_1$, a więc wobec lematu $G_1 \times G_2$ jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy G_1 i G_2 takie są, co istotnie ma miejsce. □

Wniosek 4.4. *Niech G_1 i G_2 będą grupami. Wówczas*

$G_1 \times G_2$ jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy G_1 i G_2 są rozwiązalne.

Twierdzenie 4.3. *Niech $(G, \cdot)$ będzie p -grupą. Wówczas G jest nilpotentna.*

Dowód. Załóżmy, że $|G| = p^n$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Jeśli $n = 1$, to $|G| = p$, a więc G jest cykliczna, a więc i abelowa, a tym samym nilpotentna. Załóżmy więc, że dla grup rzędu p^l , $l \in \{1, \dots, n\}$, teza jest prawdziwa. Pokażemy, że grupa rzędu p^{n+1} jest nilpotentna. Jeżeli G jest abelowa, to jest nilpotentna. Jeżeli G nie jest abelowa, to $Z(G) \neq G$. Ponadto, wobec Twierdzenia 3.1, $Z(G) \neq \{1\}$. Zatem $|G/Z(G)| = (G : Z(G)) \in \{p, \dots, p^n\}$ i $G/Z(G)$ jest nilpotentna wobec założenia indukcyjnego. Ponadto $Z(G)$ jest nilpotentna (jako abelowa) i $Z(G) \triangleleft G$ i wobec lematu G jest nilpotentna. □

Wniosek 4.5. *Niech $(G, \cdot)$ będzie p -grupą. Wówczas G jest rozwiązalna.*

Twierdzenie 4.4. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $|G| = pq$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi. Wówczas G jest grupą rozwiązalną.*

Dowód. Załóżmy, że $p > q$. Wobec Wniosku 3.4 istnieje $H \triangleleft G$ taka, że $|H| = p$. Zatem H jest cykliczna, a więc abelowa i przez to rozwiązalna. Ponadto $|G/H| = (G : H) = \frac{|G|}{|H|} = \frac{pq}{p} = q$, więc G/H jest cykliczna, czyli abelowa, czyli rozwiązalna. Tym samym G jest rozwiązalna. □

Przykłady:

(4) Rozważmy grupę $D(4)$. Mamy

$$|D(4)| = 8 = 2^3,$$

a więc $D(4)$ jest rozwiązalna jako p -grupa.

(5) Rozważmy grupę $S(3)$. Mamy

$$|S(3)| = 6 = 2 \cdot 3,$$

a więc $S(3)$ jest rozwiązalna jako grupa rzędu pq .

Twierdzenie 4.5 (Burnside'a). ¹¹ *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $|G| = p^a q^b$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi oraz $a, b \in \mathbb{N}$. Wówczas G jest grupą rozwiązalną.*

¹¹Twierdzenie pochodzi z 1911 roku, zwiemy je też "p^aq^b-theorem".

Twierdzenie 4.6 (Feit’a-Thompsona).¹² *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $|G| = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wówczas G jest grupą rozwiązalną.*

¹²Twierdzenie pochodzi z 1963 roku, jego oryginalny dowód zajmuje 254 strony: W. Feit, J. Thompson, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. of Math. 13 (1963), 775-1029.