

2. WYKŁAD 2: DZIAŁANIE GRUPY NA ZBIORZE.

Definicja 2.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $X \neq \emptyset$. Mówimy, że **grupa G działa na zbiorze X** (lub że **G jest grupą przekształceń zbioru X** lub **X jest G -grupą**) jeżeli istnieje odwzorowanie $\beta : G \times X \rightarrow X$ takie, że

- (1) $\forall x \in X (\beta(1, x) = x)$;
- (2) $\forall x \in X \forall g, h \in G (\beta(g, \beta(h, x)) = \beta(g \cdot h, x))$.

Oznaczamy:

$$\forall x \in X \forall g \in G (gx = \beta(g, x)).$$

Wówczas powyższe aksjomaty przepiszą się jako:

- (1) $\forall x \in X (1x = x)$;
- (2) $\forall x \in X \forall g, h \in G (g(hx) = (g \cdot h)x)$.

Przykłady:

- (1) Rozważmy grupę $(G, \cdot)$ i zbiór $X \neq \emptyset$. Wówczas

$$\beta(g, x) = x$$

jest działaniem grupy G na zbiorze X .

- (2) Rozważmy zbiór $X \neq \emptyset$ i grupę $(S(X), \circ)$. Wówczas

$$\beta(\sigma, x) = \sigma(x)$$

jest działaniem grupy $S(X)$ na zbiorze X .

- (3) Rozważmy przestrzeń liniową V i grupę $(Aut(V), \circ)$. Wówczas

$$\beta(\phi, v) = \phi(v)$$

jest działaniem grupy $Aut(V)$ na zbiorze V .

- (4) Rozważmy grupę $(G, \cdot)$ i podgrupę $H < G$. Wówczas

$$\beta(g, h)gh$$

jest działaniem grupy G na zbiorze H . Nazywamy je **działaniem przez lewostronne przesunięcie**.

- (5) Rozważmy grupę $(G, \cdot)$ i podgrupę $H < G$. Wówczas

$$\beta(g, h) = ghg^{-1}$$

jest działaniem grupy G na zbiorze H . Nazywamy je **działaniem przez automorfizmy wewnętrzne**.

Uwaga 2.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiorze X . Wówczas:

- (1) jeżeli $gx = gy$, to $(ag)x = (ah)y$, dla $a, g, h \in G$ oraz $x, y \in X$;
- (2) jeżeli $gx = gy$, to $x = y$, dla $g \in G$ oraz $x, y \in X$;
- (3) jeżeli $gx = hx$, to $(h^{-1}g)x = x$, dla $g, h \in G$ oraz $x \in X$.

Dowód. (1) Załóżmy, że $\beta(g, x) = \beta(h, y)$. Mamy:

$$\beta(ag, x) = \beta(a, \beta(g, x)) = \beta(a, \beta(h, y)) = \beta(ah, y).$$

- (2) Załóżmy, że $\beta(g, x) = \beta(g, y)$. Mamy:

$$\begin{aligned} x &= \beta(1, x) = \beta(g^{-1}g, x) = \beta(g^{-1}, \beta(g, x)) = \\ &= \beta(g^{-1}, \beta(g, y)) = \beta(gg^{-1}, y) = \beta(1, y) = y. \end{aligned}$$

(3) Załóżmy, że $\beta(g, x) = \beta(h, x)$. Mamy:

$$\beta(h^{-1}g, x) = \beta(h^{-1}, \beta(g, x)) = \beta(h^{-1}, \beta(h, x)) = \beta(h^{-1}h, x) = \beta(1, x) = x.$$

□

Uwaga 2.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech $\beta : G \times X \rightarrow X$ będzie działaniem grupy G na zbiorze X . Wówczas odwzorowanie $\Phi : G \rightarrow S(X)$ dane wzorem

$$\Phi(g) = \beta_g,$$

gdzie $\beta_g : X \rightarrow X$ dane jest wzorem

$$\beta_g(x) = \beta(g, x), \text{ dla } x \in X,$$

jest homomorfizmem grup. Nazywamy go **reprezentacją wyznaczoną przez działanie grupy na zbiorze**.

Dowód. Pokażemy najpierw, że Φ jest dobrze określone. Ustalmy w tym celu $g \in G$ i pokażemy, że β_g jest bijekcją. Dla dowodu injektywności ustalmy $x, y \in X$ i załóżmy, że $\beta_g(x) = \beta_g(y)$. Wówczas:

$$\beta_g(x) = \beta_g(y) \Rightarrow gx = gy \Rightarrow x = y.$$

Dla dowodu surjektywności ustalmy $y \in X$. Wówczas

$$y = \beta(1, y) = \beta(gg^{-1}, y) = \beta(g, \beta(g^{-1}, y)) = \beta_g(\beta(g^{-1}, y)).$$

Pozostaje sprawdzić, że Φ jest homomorfizmem. Istotnie, ustalmy $g, h \in G$ oraz $x \in X$. Mamy:

$$\Phi(gh)(x) = \beta_{gh}(x) = \beta(gh, x) = \beta(g, \beta(h, x)) = \beta_g(\beta(h, x)) = \beta_g \circ \beta_h(x) = \Phi(g) \circ \Phi(h)(x).$$

□

Uwaga 2.3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech $\Phi : G \rightarrow S(X)$ będzie homomorfizmem grup. Wówczas odwzorowanie $\beta : G \times X \rightarrow X$ dane wzorem

$$\beta(g, x) = \Phi(g)(x)$$

jest działaniem grupy na zbiorze.

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\beta(1, x) = x$. Istotnie, ustalmy $x \in X$. Mamy:

$$\beta(1, x) = \Phi(1)(x) = id_X(x) = x.$$

Następnie pokażemy, że $\beta(g, \beta(h, x)) = \beta(gh, x)$. Ustalmy $g, h \in G$ oraz $x \in X$. Mamy:

$$\begin{aligned} \beta(g, \beta(h, x)) &= \Phi(g)(\beta(h, x)) = \Phi(g)(\Phi(h)(x)) = \\ &= \Phi(g) \circ \Phi(h)(x) = \Phi(gh)(x) = \beta(gh, x). \end{aligned}$$

□

Definicja 2.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Zbiór

$$Orb(x) = \{gx : g \in G\}$$

nazywamy **orbitą elementu** $x \in X$.

Definicja 2.3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Mówimy, że x jest **sprężone z y ze względu na działanie G na X** , jeśli

$$\exists g \in G (y = gx).$$

Oznaczamy $x \approx y$.

Twierdzenie 2.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Wówczas relacja $\approx$ jest równoważnością oraz $[x]_{\approx} = \text{Orb}(x)$.

Dowód. Pokażemy, że $\approx$ jest równoważnością. Istotnie, relacja ta jest zwrotna, bo:

$$x = 1x, \text{ więc } x \approx x;$$

jest symetryczna, bo gdy ustalimy $x, y \in X$ takie, że $x \approx y$, a więc takie, że dla pewnego $g \in G$ $y = gx$, to wówczas $g^{-1}y = x$, czyli $y \approx x$; jest też przechodnia, bo gdy ustalimy $x, y, z \in X$ takie, że $x \approx y$ oraz $y \approx z$, a więc takie, że dla pewnych $g, h \in G$ $y = gx$ oraz $z = hy$, to wówczas

$$z = hy = h(gx) = (hg)x.$$

Pozostaje wykazać, że $[x]_{\approx} = \text{Orb}(x)$. Istotnie:

$$y \in [x]_{\approx} \Leftrightarrow x \approx y \Leftrightarrow \exists g \in G (y = gx) \Leftrightarrow y \in \text{Orb}(x).$$

□

Wniosek 2.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Wówczas:

- (1) $\forall x \in X (x \in \text{Orb}(x))$;
- (2) jeśli $\text{Orb}(x) \neq \text{Orb}(y)$, to $\text{Orb}(x) \cap \text{Orb}(y) = \emptyset$;
- (3) jeśli $\text{Orb}(x) \cap \text{Orb}(y) \neq \emptyset$, to $\text{Orb}(x) = \text{Orb}(y)$;
- (4) $X = \bigcup_{x \in X} \text{Orb}(x)$.

Przykłady:

- (6) Rozważmy grupę $(G, \cdot)$ i podgrupę $H < G$. Niech H działa na G przez lewostronne przesunięcia. Wówczas:

$$\text{Orb}(x) = \{y \in G : \exists g \in H (y = gx)\} = Hx.$$

- (7) Rozważmy grupę $(G, \cdot)$. Niech G działa na zbiór swoich elementów przez automorfizmy wewnętrzne. Wówczas:

$$\text{Orb}(x) = \{y \in G : \exists g \in G (y = gxg^{-1})\} = K(x).$$

Definicja 2.4. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Mówimy, że grupa G działa **przechodnio** na zbiorze X , jeśli

$$\forall x \in X (\text{Orb}(x) = X).$$

Definicja 2.5. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Zbiór

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G : gx = x\}$$

nazywamy **stabilizatorem elementu x** (albo **grupą izotropii**, albo **podgrupą stacjonarną**, albo **podgrupą stabilną**).

Przykłady:

- (8) Rozważmy grupę $(G, \cdot)$ i podgrupę $H < G$. Niech H działa na G przez lewostronne przesunięcia. Wówczas:

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G : x = gx\} = \{1\}.$$

- (9) Rozważmy grupę $(G, \cdot)$. Niech G działa na zbiór swoich elementów przez automorfizmy wewnętrzne. Wówczas:

$$\begin{aligned} \text{Stab}(x) &= \{g \in G : x = gxg^{-1}\} = \\ &= \{g \in G : xg = gx\} = N(\{x\}) = Z(\{x\}). \end{aligned}$$

Uwaga 2.4. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Niech $g \in G$, $x, y \in X$. Wówczas:

- (1) $Stab(x) < G$;
- (2) jeśli $y = gx$, to $Stab(y) = gStab(x)g^{-1}$;
- (3) jeśli $y = gx$, to $\{h \in G : y = hx\} = gStab(x)$.

Dowód. (1) Ustalmy $g, h \in Stab(x)$. Wówczas $x = gx$ oraz $x = hx$. Wobec tego $h^{-1}x = x$ i mamy

$$(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = gx = x,$$

a więc $gh^{-1} \in Stab(x)$.

(2) Załóżmy, że $y = gx$. Ustalmy $h \in Stab(y)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} h \in Stab(y) &\Leftrightarrow y = hx \Leftrightarrow gx = h(gx) \\ &\Leftrightarrow gx = (hg)x \Leftrightarrow (g^{-1}hg)x = x \\ &\Leftrightarrow g^{-1}hg \in Stab(x) \Leftrightarrow h \in gStab(x)g^{-1}. \end{aligned}$$

(3) Załóżmy, że $y = gx$ i ustalmy $h \in gStab(x)$. Mamy:

$$h \in gStab(x) \Leftrightarrow g^{-1}h \in Stab(x) \Leftrightarrow (g^{-1}h)x = x \Leftrightarrow hx = gx \Leftrightarrow y = hx.$$

□

Twierdzenie 2.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Niech $x \in X$. Wówczas:

$$|Orb(x)| = (G : Stab(x)).$$

Dowód. Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : Orb(x) \rightarrow W_L(Stab(x))$ wzorem:

$$\phi(gx) = gStab(x).$$

Jest oczywiste, że odwzorowanie to jest surjektywne, pozostaje sprawdzić, że jest to dobrze określona injektywna funkcja. Ustalmy $gx, hx \in Orb(x)$ i niech $gx = hx$. Wówczas:

$$\begin{aligned} gx = hx &\Leftrightarrow (h^{-1}g)x = x \Leftrightarrow h^{-1}g \in Stab(x) \\ &\Leftrightarrow g \in hStab(x) \Leftrightarrow gStab(x) = hStab(x) \Leftrightarrow \phi(gx) = \phi(hx). \end{aligned}$$

□

Wniosek 2.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą skończoną, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Niech $x \in X$. Wówczas:

$$|G| = |Stab(x)| \cdot |Orb(x)|.$$

W szczególności $|Orb(x)|$ i $|Stab(x)|$ są dzielnikami liczby $|G|$.

Wniosek 2.3 (Wzór klas). Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem skończonym, niech G działa na zbiór X . Niech $Orb(x_1), \dots, Orb(x_k)$ będą wszystkimi parami rozłącznymi orbitami. Wówczas

$$|X| = \sum_{i=1}^k |Orb(x_i)| = \sum_{i=1}^k (G : Stab(x_i)).$$

Przykłady:

- (10) Rozważmy grupę skończoną $(G, \cdot)$ i podgrupę $H < G$. Niech H działa na G przez lewostronne przesunięcia. Wówczas:

$$|G| = (G : H) \cdot |H|.$$

Otrzymujemy zatem twierdzenie Lagrange'a.

- (11) Rozważmy grupę skończoną $(G, \cdot)$. Niech G działa na zbiór swoich elementów przez automorfizmy wewnętrzne. Wówczas:

$$|G| = \sum_{i=1}^k |K(x_i)|,$$

gdzie $K(x_1), \dots, K(x_k)$ są wszystkimi parami rozłącznymi klasami elementów sprzężonych.

Uwaga 2.5. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą skończoną. Niech G działa na zbiór swoich elementów przez automorfizmy wewnętrzne. Niech $Orb(x_1), \dots, Orb(x_l)$ będą wszystkimi parami rozłącznymi orbitami mocy większej niż 1. Wówczas:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^l |Orb(x_i)| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^l (G : Z(\{x_i\})).$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że:

$$\begin{aligned} |K(x)| = 1 &\Leftrightarrow |\{y \in G : \exists g \in G (y = gxg^{-1})\}| \\ &\Leftrightarrow \forall g \in G (xg = gx) \Leftrightarrow x \in Z(G). \end{aligned}$$

□

Uwaga 2.6. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Wówczas:

- (1) jeżeli oznaczmy

$$G^* = \bigcap x \in X Stab(x),$$

to $G^* \triangleleft G$;

- (2) jeżeli $\Phi : G \rightarrow S(X)$ jest reprezentacją wyznaczoną przez działanie grupy G na zbiorze X , to

$$\Phi(G) \cong G/G^*.$$

Dowód. (1) Niech $\Phi : G \rightarrow S(X)$ będzie reprezentacją wyznaczoną przez działanie grupy G na zbiorze X :

$$\Phi(g) = \beta_g.$$

Mamy:

$$\begin{aligned} g \in \ker \Phi &\Leftrightarrow \beta_g = id_X \Leftrightarrow \forall x \in X (gx = x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X (g \in Stab(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g \in G^*. \end{aligned}$$

Zatem $G^* = \ker \Phi \triangleleft G$.

- (2) Wobec twierdzenia o izomorfizmie:

$$G/G^* \cong G/\ker \Phi \cong \Phi(G).$$

□

Definicja 2.6. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $X \neq \emptyset$ zbiorem, niech G działa na zbiór X . Zbiór

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}$$

nazywamy **zbiorem punktów stałych przekształcenia β_g** . Zbiór:

$$X^* = \bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g)$$

nazywamy **zbiorem punktów stałych działania grupy G na zbiorze X** .