

1. WYKŁAD 1: NORMALIZATOR, CENTRALIZATOR, KOMUTANT.

Definicja 1.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$. **Normalizatorem zbioru M w podgrupie H** nazywamy zbiór

$$N_H(M) = \{a \in H : i_a(M) = M\}.^1$$

Jeżeli $H = G$ to normalizator zbioru M w podgrupie G nazywamy **normalizatorem zbioru M** i oznaczamy $N(M)$:

$$N(M) = N_G(M) = \{a \in G : i_a(M) = M\}.$$

Uwaga 1.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$. Wówczas:

- (1) $N_H(M) < H$ oraz $N(M) < G$;
- (2) jeżeli $M < G$, to wówczas $M \triangleleft H$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N_H(M) = H$ oraz $M \triangleleft G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N(M) = G$.

Dowód. Dla dowodu części (1) ustalmy $a, b \in N_H(M)$. Wówczas $i_a(M) = M$ oraz $i_b(M) = M$. Wobec tego

$$i_{ab^{-1}}(M) = i_a \circ i_{b^{-1}}(M) = i_a(i_b^{-1}(M)) = i_a(M) = M,$$

a zatem $ab^{-1} \in N_H(M)$.

Dla dowodu części (2) założmy najpierw, że $M \triangleleft H$. Oczywiście $N_H(M) \subset H$, pozostaje więc wykazać drugą inkluzję. Ustalmy $a \in H$. Wówczas $aM = Ma$, czyli $aMa^{-1} = M$, a więc $a \in N_H(M)$.

Na odwrót, założmy, że $N_H(M) = H$. Zauważmy najpierw, że $M \subset H$: istotnie, przypuśćmy, że dla pewnego $a \in M$ zachodzi $a \notin H = N_H(M)$. Wówczas $aMa^{-1} \neq M$, co jest niemożliwe wobec tego, że $a \in M$ oraz M jest podgrupą. Dalej, skoro $H = N_H(M)$, dla wszystkich $a \in H$ mamy $aMa^{-1} = M$, a zatem $M \triangleleft H$. $\square$

Twierdzenie 1.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$. Wówczas

$$|\{i_a(M) : a \in H\}| = (H : N_H(M)).$$

Dowód. Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : \{i_a(M) : a \in H\} \rightarrow W_L^H(N_H(M))$ ² wzorem

$$\phi(i_a(M)) = a \cdot N_H(M), \text{ dla } i_a(M) \in \{i_a(M) : a \in H\}.$$

Jest jasne, że dla ustalonej warstwy $a \cdot N_H(M)$, $a \cdot N_H(M) = \phi(i_a(M))$, pozostaje więc wykazać, że odwzorowanie ϕ jest dobrze określone i różnowartościowe. Istotnie, dla $a, b \in H$ mamy:

$$\begin{aligned} i_a(M) = i_b(M) &\Leftrightarrow aMa^{-1} = bMb^{-1} \Leftrightarrow b^{-1}aMa^{-1}b = M \\ &\Leftrightarrow b^{-1}aM(b^{-1}a)^{-1} = M \Leftrightarrow b^{-1}a \in N_H(M) \\ &\Leftrightarrow b^{-1}aN_H(M) = N_H(M) \Leftrightarrow aN_H(M) = bN_H(M). \end{aligned}$$

$\square$

Wniosek 1.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą oraz niech $x \in G$. Wówczas

$$|K(x)| = (G : N(\{x\})).^3$$

¹Przypomnijmy, że $i_a : G \rightarrow G$ oznacza automorfizm wewnętrzny dany wzorem $i_a(g) = aga^{-1}$

²Przypomnijmy, że symbolem $W_L^G(H)$ oznaczamy zbiór wszystkich warstw lewostronnych podgrupy H w grupie G . Podobnie symbolem $W_R^G(H)$ oznaczamy zbiór warstw prawostronnych.

³Przypomnijmy, że symbolem $K(x)$ oznaczamy klasę elementów sprzężonych z x : $K(x) = \{y \in G : \exists g \in G (y = gxg^{-1})\}$.

Uwaga 1.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M < G$. Wówczas

$$M \triangleleft N_H(M) \text{ oraz } M \triangleleft N(M).$$

Grupę $N(M)/M$ nazywamy **grupą Weyla**⁴ podgrupy M w grupie G i oznaczamy $W(M)$.

Dowód. Zauważmy, że ponieważ M jest grupą, dla dowolnego $a \in M$ mamy $aMa^{-1} = M$, a zatem $M \subset N_H(M)$. W szczególności M jest podgrupą $N_H(M)$. Wprost z definicji $N_H(M)$ otrzymujemy, że jest to podgrupa normalna. $\square$

Definicja 1.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$. **Centralizatorem zbioru M w podgrupie H** nazywamy zbiór

$$Z_H(M) = \{a \in H : \forall m \in M (i_a(m) = m)\}.$$

Jeżeli $H = G$, to normalizator zbioru M w G nazywamy po prostu **centralizatorem zbioru M** i oznaczamy

$$Z(M) = Z_G(M) = \{a \in G \forall m \in M (i_a(m) = m)\}.$$

Jeżeli ponadto $M = G$, to centralizator G nazywamy **centrum grupy G** .

Uwaga 1.3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$. Wówczas:

- (1) $Z_H(M) < H$ oraz $Z(M) < G$ oraz $Z(G) < G$;
- (2) $Z_H(M) \triangleleft N_H(M)$ oraz $Z(M) \triangleleft N(M)$ oraz $Z(G) \triangleleft G$.

Dowód. Dowód części (1) pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Jest oczywiste, że $Z_H(M) \subset N_H(M)$ i skoro $Z_H(M)$ jest grupą, więc w szczególności jest podgrupą $N_H(M)$. Pozostaje sprawdzić, że jest to podgrupa normalna. Ustalmy $a \in N_H(M)$ i $x \in Z_H(M)$. Wówczas $i_x(m) = m$, dla $m \in M$, a zatem

$$i_{axa^{-1}}(m) = i_a(i_x(i_a^{-1}(m))) = i_a(i_a^{-1}(m)) = m,$$

jako że $(i_a^{-1}(m) \in M$. Wobec tego $axa^{-1} \in Z_H(M)$ i wobec dowolności wyboru $x \in Z_H(M)$ otrzymujemy $aZ_H(M)a^{-1} \subset Z_H(M)$, więc $Z_H(M) \triangleleft N_H(M)$. $\square$

Uwaga 1.4. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas

$$G/Z(G) \cong \text{Inn}G. \quad ^5$$

Dowód. Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : G \rightarrow \text{Inn}G$ wzorem

$$\phi(a) = i_a.$$

Bez trudu sprawdzamy, że ϕ jest dobrze określonym surjektywnym homomorfizmem. Pozostaje sprawdzić, że $\ker \phi = Z(G)$ i skorzystać z twierdzenia o izomorfizmie:

$$\begin{aligned} a \in \ker \phi &\Leftrightarrow i_a = id_G \Leftrightarrow \forall g \in G (aga^{-1} = g) \\ &\Leftrightarrow \forall g \in G (ag = ga) \Leftrightarrow a \in Z(G). \end{aligned}$$

$\square$

Przykłady:

- (1) Rozważmy $D(3)$. Wówczas $Z(D(3)) = \{id\}$.
- (2) Rozważmy $D(4)$. Wówczas $Z(D(4)) = \{id, O_{180^\circ}\}$.
- (3) Rozważmy $S(n)$, $n \geq 3$. Wówczas $Z(S(n)) = \{id\}$.

⁴Hermann Weyl (1885–1955) – matematyk niemiecki.

⁵Przypomnijmy, że symbol $\text{Inn}G$ oznacza grupę automorfizmów wewnętrznych grupy G .

- (4) Rozważmy $GL(n, K)$. Wówczas $Z(GL(n, K)) = \{aI : a \in K^*\}$, gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Definicja 1.3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą oraz niech $a, b \in G$. Element

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

nazywamy **komutatorem elementów a i b** .

Uwaga 1.5. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą oraz niech $a, b \in G$. Wówczas:

- (1) $[a, a] = 1$;
- (2) $[a, b] = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab = ba$;
- (3) (a) $[a, b]^{-1} = [b, a]$;
- (b) $[a^{-1}, b] = [b, a]^{a^{-1}}$;⁶
- (c) $[ab, c] = [a, c]^b [b, c]$, $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$;
- (d) $[[a, b^{-1}], c]^b [[b, c^{-1}], a]^c [[c, a^{-1}], b]^a = 1$;
- (e) jeżeli $c \in Z(\{[a, b]\})$, to $[a, bc] = [a, c][a, b]$ oraz $[ac, b] = [a, b][c, b]$;
- (4) jeżeli F jest grupą oraz $\phi : G \rightarrow F$ jest homomorfizmem grup, to

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)].$$

Dowód. Proste dowody powyższych własności pozostawiamy jako ćwiczenie. □

Definicja 1.4. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $M_1, M_2 \subset G$. **Wzajemnym komutantem zbiorów M_1 i M_2** nazywamy grupę

$$[M_1, M_2] = \langle \{[a, b] : a \in M_1, b \in M_2\} \rangle.$$

Jeśli $M_1 = M_2 = G$, to wzajemny komutant grupy G z samą sobą nazywamy **komutantem grupy G** i oznaczamy $[G, G]$.

Wniosek 1.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $M_1, M_2 \subset G$. Wówczas:

$$[M_1, M_2] = \{[a_1, b_1]^{k_1} \cdot \dots \cdot [a_n, b_n]^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z}, a_i \in M_1, b_i \in M_2\}.$$

Uwaga 1.6. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Komutant grupy G nie pokrywa się na ogół ze zbiorem wszystkich komutatorów. Istnieją grupy skończone, w których iloczyn dwóch komutatorów może nie być równy żadnemu komutatorowi.

Lemat 1.1. Niech G i F będą grupami, $\phi : G \rightarrow F$ homomorfizmem grup, a $M_1, M_2 \subset G$. Wówczas:

$$\phi([M_1, M_2]) = [\phi(M_1), \phi(M_2)] \text{ oraz } \phi([G, G]) = [\phi(G), \phi(G)].$$

Dowód. ($\subset$) : Ustalmy $y \in \phi([M_1, M_2])$. Wówczas $y = \phi(x)$, gdzie

$$x = [a_1, b_1]^{k_1} \cdot \dots \cdot [a_n, b_n]^{k_n}$$

dla pewnych $n \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in M_1$, $b_i \in M_2$. Wobec tego:

$$\begin{aligned} y &= \phi([a_1, b_1]^{k_1} \cdot \dots \cdot [a_n, b_n]^{k_n}) = \phi([a_1, b_1])^{k_1} \cdot \dots \cdot \phi([a_n, b_n])^{k_n} \\ &= [\phi(a_1), \phi(b_1)]^{k_1} \cdot \dots \cdot [\phi(a_n), \phi(b_n)]^{k_n} \in [\phi(M_1), \phi(M_2)]. \end{aligned}$$

($\supset$) : Ustalmy $c \in \phi(M_1)$, $d \in \phi(M_2)$. Wówczas $c = \phi(a)$, $d = \phi(b)$ dla pewnych $a \in M_1$, $b \in M_2$. Mamy:

$$[c, d] = [\phi(a), \phi(b)] = \phi([a, b]) \in \phi([M_1, M_2])$$

⁶Przypomnijmy, że symbolem a^x oznaczamy element sprzężony z a poprzez x , tj. axa^{-1} .

i skoro $\phi([M_1, M_2]) < F$ oraz $[\phi(M_1), \phi(M_2)]$ jest najmniejszą podgrupą zawierającą komutatory $[c, d]$, $c \in \phi(M_1)$, $d \in \phi(M_2)$, to $[\phi(M_1), \phi(M_2)] \subset \phi([M_1, M_2])$. $\square$

Twierdzenie 1.2. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $M_1 \triangleleft G$, $M_2 \triangleleft G$. Wówczas*

$$[M_1, M_2] \triangleleft G \text{ oraz } [G, G] \triangleleft G.$$

Dowód. Ustalmy $a \in G$. Mamy:

$$\begin{aligned} a[M_1, M_2]a^{-1} &= i_a([M_1, M_2]) = [i_a(M_1), i_a(M_2)] = \\ &= [aM_1a^{-1}, aM_2a^{-1}] = [M_1, M_2]. \end{aligned}$$

$\square$

Twierdzenie 1.3. *Niech G i F będą grupami, a $\phi : G \rightarrow F$ surjektywnym homomorfizmem grup. Wówczas*

$$F \text{ jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy } [G, G] < \ker \phi.$$

Dowód. Załóżmy, że F jest abelowa i ustalmy $a, b \in G$. Wtedy

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)] = 1,$$

a zatem $[a, b] \in \ker \phi$ i skoro $\ker \phi < G$ oraz $[G, G]$ jest najmniejszą podgrupą zawierającą komutatory $[a, b]$, $a, b \in G$, to $[G, G] < \ker \phi$.

Na odwrót, załóżmy, że $[G, G] < \ker \phi$ i ustalmy $c, d \in F$. Wobec surjektywności ϕ , $c = \phi(a)$ i $d = \phi(b)$, dla pewnych $a, b \in G$. Ponadto

$$[c, d] = [\phi(a), \phi(b)] = \phi([a, b]) = 1,$$

a więc $cd = dc$. $\square$

Wniosek 1.3. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H \triangleleft G$. Wówczas*

$$G/H \text{ jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy } [G, G] < H.$$

Innymi słowy, komutant jest najmniejszą podgrupą normalną względem której grupa ilorazowa jest abelowa.

Wniosek 1.4. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas*

$$G/[G, G] \text{ jest abelowa.}$$

Wniosek 1.5. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas*

$$G \text{ jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy } [G, G] = \{1\}.$$

Definicja 1.5. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Homomorfizm kanoniczny $\kappa : G \rightarrow G/[G, G]$ nazywamy **abelianizacją grupy G** .*

Lemat 1.2. *Niech G i F będą grupami, $\phi : G \rightarrow F$ homomorfizmem grup. Niech $M_1, M_2 \subset G$, $H < G$, $L_1, L_2 \subset F$. Wówczas*

- (1) $[\phi^{-1}(L_1), \phi^{-1}(L_2)] \subset \phi^{-1}([L_1, L_2])$ oraz $[\phi^{-1}(F), \phi^{-1}(F)] \subset \phi^{-1}([F, F])$;
- (2) $[M_1 \cap H, M_2 \cap H] \subset [M_1, M_2] \cap H$.

Dowód. (1): Ustalmy $a \in \phi^{-1}(L_1)$, $b \in \phi^{-1}(L_2)$. Wówczas $\phi(a) \in L_1$, $\phi(b) \in L_2$ i tym samym

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)] \in [L_1, L_2].$$

Zatem $[a, b] \in \phi^{-1}([L_1, L_2])$ i skoro $\phi^{-1}([L_1, L_2]) < G$ oraz $[\phi^{-1}(L_1), \phi^{-1}(L_2)]$ jest najmniejszą podgrupą zawierającą komutatory $[a, b]$, $a \in \phi^{-1}(L_1)$, $b \in \phi^{-1}(L_2)$, to $[\phi^{-1}(L_1), \phi^{-1}(L_2)] \subset \phi^{-1}([L_1, L_2])$.

(2): Ustalmy $a \in M_1 \cap H$, $b \in M_2 \cap H$. Wówczas

$$[a, b] \in [M_1, M_2]$$

oraz

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1} \in H.$$

Zatem $[a, b] \in [M_1, M_2] \cap H$ i skoro $[M_1, M_2] \cap H < G$ oraz $[M_1 \cap H, M_2 \cap H]$ jest najmniejszą podgrupą zawierającą komutatory $[a, b]$, $a \in M_1 \cap H$, $b \in M_2 \cap H$, to $[M_1 \cap H, M_2 \cap H] \subset [M_1, M_2] \cap H$. $\square$

