

Zestaw zadań 9: jednoznaczność rozkładu w pierścieniach wielomianów, kryteria rozkładalności wielomianów.

- (1) Niech P będzie pierścieniem z jednoznacznym rozkładem oraz K niech będzie ciałem ułamków pierścienia P . Niech ponadto $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in P[X]$, gdzie $n > 0$, $a_n \neq 0$. Wykazać, że jeśli $\frac{p}{q} \in K$ gdzie $p, q \in P$ jest pierwiastkiem wielomianu f , to $p|a_0$ oraz $q|a_n$.
- (2) Niech P będzie pierścieniem z jednoznacznym rozkładem oraz K niech będzie ciałem ułamków pierścienia P . Niech ponadto $f(X) \in P[X]$ będzie wielomianem unormowanym. Wykazać, że jeśli f ma pierwiastek w ciele K , to ma pierwiastek w pierścieniu P .
- (3) Rozwiązać dane równanie znajdując najpierw pierwiastek wymierny:
 - (a) $X^3 - 11X^2 + 19X + 55 = 0$,
 - (b) $X^3 - 3X^2 - 5X - 1 = 0$,
 - (c) $6X^3 - 17X^2 - 26X - 8 = 0$,
 - (d) $12X^4 - 92X^3 + 251X^2 - 280X + 100 = 0$.
- (4) Rozwiązać dane równanie znajdując najpierw pierwiastek należący do pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:
 - (a) $X^3 - (3 + \sqrt{-2})X^2 - (5 - 2\sqrt{-2})X + (7 + 7\sqrt{-2}) = 0$,
 - (b) $X^3 + (7 + \sqrt{-2})X^2 + (17 + 6\sqrt{-2})X - (11 + 11\sqrt{-2}) = 0$.
- (5) Niech P będzie pierścieniem całkowitym, $f(X) \in P[X]$ oraz $a \in P$. Wykazać, wielomian $f(X)$ jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $g(X) = f(X + a)$ jest nierozkładalny.
- (6) Stosując kryterium Eisensteina wykazać, że wielomian f jest nierozkładalny w pierścieniu P , jeśli:
 - (a) $f = X^3 - 3X^2 - 6X + 3$, $P = \mathbb{Z}[X]$,
 - (b) $f = 2X^5 + 10X^4 + 10$, $P = \mathbb{Q}[X]$,
 - (c) $f = 3X^6 - 10$, $P = \mathbb{Q}[X]$,
 - (d) $f = X^3 + (2 + 2i)X^2 - 2X + (1 + i)$, $P = \mathbb{Z}[i][X]$,
 - (e) $f = 2X^5 + 10X^3 + 5X^2 - 5$, $P = \mathbb{Z}[i][X]$,
 - (f) $f = X^3 + 11X + (3 + \sqrt{-2})$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}][X]$,
 - (g) $f = X^4 + Y^2 + 1$, $P = \mathbb{R}[X, Y]$,
 - (h) $f = Y^3X + Y^2X + Y^3 + Y^2 + X + 1$, $P = \mathbb{Z}[X, Y]$,
 - (i) $f = Y^4 + X^3 + 13X + (3 + 2i)$, $P = \mathbb{Z}[i][X, Y]$.
- (7) Wielomiany $X^4 - 2$, $X^4 + 2$, $X^6 - 2$, $X^5 - 1$ rozłożyć na czynniki nierozkładalne nad ciałem:
 - (a) $\mathbb{Q}$,
 - (b) $\mathbb{R}$,
 - (c) $\mathbb{C}$.
- (8) Sprawdzić, czy ideał I jest pierwszy, czy maksymalny w pierścieniu P , jeśli:
 - (a) $I = (2X^4 + 8X^2 + 6)$, $P = \mathbb{Q}[X]$,
 - (b) $I = (X^3 + 17X^2 + (4 + i))$, $P = \mathbb{Z}[i][X]$,
 - (c) $I = (X^3 + X^2 + 1)$, $P = \mathbb{Z}_3[X]$,
 - (d) $I = (X^5 + Y^2 + 3)$, $P = \mathbb{Z}[i][X, Y]$,
 - (e) $I = (X^3 + X + 1)$, $P = \mathbb{Z}_2[X]$,
 - (f) $I = (Y^4 + XY^3 + XY + X)$, $P = \mathbb{R}[X, Y]$.