

Zestaw zadań 8: pierścienie euklidesowe, zastosowania jednoznaczności rozkładu do rozwiązywania równań.

- (1) Niech D będzie liczbą całkowitą bezkwadratową (tzn. niepodzielną przez kwadrat żadnej liczby pierwszej) oraz funkcja $N : \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ określona będzie wzorem $N(a + b\sqrt{D}) = |a^2 - b^2D|$. Wykazać, że:
- (a) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$;
 - (b) $\alpha \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]) \iff N(\alpha) = 1$;
 - (c) jeśli $N(\alpha)$ jest liczbą pierwszą, to α jest elementem nierozkładalnym.
- (2) Korzystając z algorytmu Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}$ obliczyć NWD danej pary liczb, a następnie przedstawić otrzymaną liczbę w postaci kombinacji liniowej danych liczb o współczynnikach całkowitych.
- (a) 287 i 14,
 - (b) 213 i 94,
 - (c) 354 i 66,
 - (d) 827 i 131,
 - (e) 3211 i 7163,
 - (f) 871 i 3627,
 - (g) 2352 i 268,
 - (h) 15088 i 4554,
 - (i) 2159 i 221,
 - (j) 29049 i 2047,
 - (k) 13699 i 1349,
 - (l) 21567 i 5005.
- (3) Korzystając z algorytmu Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}$ obliczyć odwrotność danego elementu pierścienia $\mathbb{Z}_{1734}$:
- (a) 343,
 - (b) 185,
 - (c) 637,
 - (d) 1633.
- (4) Stosując algorytm Euklidesa do wielomianów f i g z pierścienia $\mathbb{Z}_7[x]$, obliczyć $NWD(f, g)$, a następnie wielomian $NWD(f, g)$ przedstawić w postaci $NWD(f, g) = hf + kg$, gdzie $h, k \in \mathbb{Z}_7[x]$:
- (a) $f = x^4 + 5x^3 + 2x + 6, g = x^3 + 4x^2 + 4x + 5$,
 - (b) $f = x^4 + x^2 + 6x + 3, g = x^4 + x^3 + 5x + 1$,
 - (c) $f = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 6, g = x^3 + 6x + 1$,
 - (d) $f = x^3 + x^2 + 6x + 4, g = x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 2$.
- (5) Korzystając z algorytmu Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$, obliczyć w $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x + 1)$ odwrotność danej warstwy:
- (a) $x^2 + 4x + 1 + (x^3 + x + 1)$,
 - (b) $2x^2 + 4x + 3 + (x^3 + x + 1)$,
 - (c) $4x^2 + 4x + 2 + (x^3 + x + 1)$,
 - (d) $4x^2 + 3x + 3 + (x^3 + x + 1)$.
- (6) Stosując algorytm Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$, obliczyć NWD danej pary liczb. (Wskazówka: Przyjąć, że $N(a + bi) = a^2 + b^2$).
- (a) $7 - i$ oraz $5 + 9i$,
 - (b) $5 + 5i$ oraz $13 + 3i$,

- (c) $22 + 5i$ oraz $5 + 3i$.
- (7) Stosując algorytm Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, obliczyć NWD danej pary liczb. (Wskazówka: Przyjąć, że $N(a + bi\sqrt{2}) = a^2 + 2b^2$).
- $5 + i\sqrt{2}$ oraz 9 ,
 - $5 + 6i\sqrt{2}$ oraz $4 - i\sqrt{2}$,
 - $7 + 6i\sqrt{2}$ oraz $19 + 10i\sqrt{2}$,
 - $6 - 15i\sqrt{2}$ oraz $1 + 11i\sqrt{2}$.
- (8) Stosując algorytm Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, obliczyć NWD danej pary liczb. (Wskazówka: Przyjąć, że $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$).
- $7 + 5\sqrt{3}$ oraz $14 - 3\sqrt{3}$,
 - $8 + \sqrt{3}$ oraz $6 - 3\sqrt{3}$,
 - $1 + 6\sqrt{3}$ oraz $4 + \sqrt{3}$.
- (9) Sprawdzić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ istnieje NWD liczb $6i\sqrt{5}$ oraz $6 + 3i\sqrt{5}$. Uwaga! Pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nie jest euklidesowy!
- (10) Udowodnić, że jedynym rozwiązaniem równania $x^3 = y^2 + 1$ w liczbach całkowitych jest $x = 1$ oraz $y = 0$. (Wskazówka: $\mathbb{Z}[i]$ jest pierścieniem całkowitym z jednoznacznym rozkładem. Następnie sprawdzić, że jeśli dane równanie ma rozwiązanie w pierścieniu $\mathbb{Z}$, to ma też rozwiązanie w pierścieniu $\mathbb{Z}_m$ dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$. Wykorzystać tę informację w celu uzyskania informacji o parzystości bądź nieparzystości x oraz y przez rozpatrzenie rozwiązań równania w pierścieniu $\mathbb{Z}_4$).
- (11) Udowodnić, że jedynym rozwiązaniem równania $2x^3 = y^2 + 1$ w liczbach całkowitych jest $x = 1$ oraz $y = \pm 1$. (Wskazówka: $\mathbb{Z}[i]$ jest pierścieniem całkowitym z jednoznacznym rozkładem).
- (12) Udowodnić, że jedynym rozwiązaniem równania $x^3 = y^2 + 4$ w liczbach całkowitych są $x = 2$, $y = \pm 2$ oraz $x = 5$, $y = \pm 11$. (Wskazówka: Skorzystać z poprzedniego zadania).