

Zestaw zadań 6: skończone grupy abelowe.

- (1) (a) Niech $B_1 < A_1$, $B_2 < A_2$ będą podgrupami grupy abelowej A i $A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Wykazać, że

$$(A_1 \oplus A_2)/(B_1 \oplus B_2) \cong A_1/B_1 \oplus A_2/B_2.$$

- (b) Niech $B_1 < A_1, B_2 < A_2, \dots, B_n < A_n$ będą podgrupami grupy abelowej A i niech

$$A_i \cap (A_1 + \dots + A_{i-1} + A_{i+1} + \dots + A_n) = \{0\}$$

dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wykazać, że

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n A_i \right) / \left(\bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^n A_i/B_i \right).$$

- (2) Załóżmy, że $A_1, \dots, A_k$ są podgrupami grupy abelowej A oraz $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$. Udowodnić, że $A \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$.

- (3) Wykazać, że grupy $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ i $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ nie są izomorficzne (Wskazówka: funkcja $f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n^{a_n}$, gdzie p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą, odwzorowuje różnowartościowo sumę prostą w zbiór $\mathbb{N}$; funkcja $g((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-na_n}$ odwzorowuje produkt na przedział $[0, 1]$).

- (4) Niech A będzie skończoną grupą abelową oraz $A = A_1 + A_2 + \dots + A_k$. Wykazać, że jeśli $a \in A$ oraz $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, gdzie $a_i \in A_i$, to $r(a)$ jest dzielnikiem liczby $NWW(r(a_1), r(a_2), \dots, r(a_k))$.

- (5) Niech A będzie skończoną grupą abelową oraz $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$. Wykazać, że jeśli $a \in A$ oraz $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, gdzie $a_i \in A_i$, to $r(a) = NWW(r(a_1), r(a_2), \dots, r(a_k))$.

- (6) Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową. Wykazać, że:

(a) $T(A) < A$,

(b) $T(T(A)) = T(A)$,

(c) jeżeli $B < A$, to $T(B) = B \cap T(A)$,

(d) jeżeli $A \cong B$, to $T(A) \cong T(B)$,

(e) $T(A \oplus B) = T(A) \oplus T(B)$,

(f) $T_p(A) < T(A) < A$,

(g) $T_p(T_p(A)) = T_p(A) = T_p(T(A))$,

(h) jeżeli $B < A$, to $T_p(B) = B \cap T_p(A)$,

(i) jeżeli $A \cong B$, to $T_p(A) \cong T_p(B)$,

(j) $T_p(A \oplus B) = T_p(A) \oplus T_p(B)$,

(k) jeżeli A jest skończone generowaną torsyjną grupą abelową, to $T_p(A) = \{0\}$ dla prawie wszystkich liczb pierwszych p ,

(l) $T_p(A/T_p(A)) = \{0\}$,

(m) $pA < A$, gdzie $pA = \{pa : a \in A\}$,

(n) jeżeli A jest skończoną grupą cykliczną oraz $|A| = p^k$, to pA jest grupą cykliczną i $|pA| = p^{k-1}$,

(o) jeżeli $B < A$, to $pB = B \cap pA$,

(p) jeżeli $A \cong B$, to $pA \cong pB$,

(q) $p(A \times B) = pA \times pB$.

- (7) Wyznaczyć wszystkie p -komponenty każdej z następujących grup: $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$, $U(\mathbb{Z}_{27})$, $U(\mathbb{Z}_{30})$, $\mathbb{Z}_{60}$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{16}$.

- (8) Grupy:

(a) $\mathbb{Z}_{24}$,

(b) $\mathbb{Z}_{60}$

przedstawić jako sumę prostą p -komponent. Dla każdego elementu grupy znaleźć jego przedstawienie w postaci sumy elementów należących do odpowiednich składników prostych.

- (9) Grupę:
 (a) $\mathbb{Z}_{144}$,
 (b) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{1000}$
 przedstawić w postaci sumy prostej p -grup.
- (10) Pokazać, że jeśli A jest p -grupą typu $(p^{\alpha_1}, \dots, p^{\alpha_r})$, to A zawiera podgrupę typu $(p^{\beta_1}, \dots, p^{\beta_s})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s \leq r$ oraz $\beta_s \leq \alpha_r, \beta_{s-1} \leq \alpha_{r-1}, \dots, \beta_1 \leq \alpha_{r-s+1}$.
- (11) Wykazać, że jeśli A jest skończoną grupą abelową rzędu n , to dla każdego dzielnika naturalnego k liczby n grupa A zawiera podgrupę rzędu k (jest to twierdzenie odwrotne do twierdzenia Lagrange'a).
- (12) Wykazać, że grupa cykliczna rzędu p , gdzie p jest liczbą pierwszą i $k > 1$, nie jest sumą prostą podgrup cyklicznych.
- (13) Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że każda grupa abelowa rzędu n jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą bezkwadratową (tzn. liczbą niepodzielną przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1).
- (14) Sprawdzić, czy grupy $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{72}$ oraz $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{18}$ są izomorficzne.
- (15) Każdą z następujących grup przedstawić w postaci sumy prostej p -grup cyklicznych:
 (a) $U(\mathbb{Z}_8)$,
 (b) $U(\mathbb{Z}_{10})$,
 (c) $U(\mathbb{Z}_{15})$,
 (d) $U(\mathbb{Z}_{35})$.
- (16) Wykazać, że jeśli A, B, C są skończonymi grupami abelowymi oraz $A \oplus C \cong B \oplus C$, to $A \oplus B$.