

Zestaw zadań 4: grupy rozwiązalne i nilpotentne.

- (1) Sprawdzić, że grupy $A(n)$, $S(n)$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ są rozwiązalne.
- (2) Sprawdzić, że dla każdego $n \geq 3$ grupa $D(n)$ izometrii własnych n -kąta foremnego jest rozwiązalna.
- (3) Wykazać, że każda grupa rzędu 12 jest rozwiązalna.
- (4) Wykazać, że każda grupa rzędu ≤ 15 jest rozwiązalna.
- (5) Niech X będzie zbiorem niepustym oraz G będzie grupą rozwiązalną. Wykazać, że grupa G^X wszystkich funkcji $X \rightarrow G$ jest rozwiązalna.
- (6) Wykazać, że grupa $G_1 \times G_2$ jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy G_1, G_2 są grupami rozwiązalnymi. Wykazać, że jeśli dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ G_i jest grupą rozwiązalną, to grupa $G_1 \times \dots \times G_n$ jest rozwiązalna.
- (7) Niech p, q będą nieparzystymi liczbami pierwszymi, $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że każda grupa rzędu
 - (a) $2pq$,
 - (b) $4p$,
 - (c) $2p^n$,
 - (d) $4p^n$jest rozwiązalna.
- (8) Udowodnić, że jeśli rząd grupy jest równy (a) $2 \cdot 3^b$, (b) $2^a \cdot 5^b$, gdzie $0 \leq a \leq 3$, (c) $2^a \cdot 7^b$, gdzie $0 \leq a \leq 2$, (d) $3^a \cdot 5^b$, gdzie $0 \leq a \leq 3$, to grupa ta jest rozwiązalna.
- (9) Wykazać, że grupy rzędu 24 i 48 są rozwiązalne.
- (10) Wykazać, że każda grupa G rzędu $n < 60$ jest rozwiązalna (Wskazówka: Udowodnić, że jeśli G nie jest p -grupą, to istnieje dzielnik pierwszy q liczby n taki, że q -podgrupa Sylowa grupy G jest podgrupą normalną).
- (11) Wykazać, że grupa G jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy grupa $\text{Inn}(G)$ jest rozwiązalna. Wykazać, że jeśli grupa $\text{Aut}(G)$ jest rozwiązalna, to grupa G jest rozwiązalna.
- (12) Sprawdzić, że:
 - (a) każda grupa abelowa jest grupą nilpotentną stopnia 1;
 - (b) każda grupa nilpotentna G jest rozwiązalna;
 - (c) grupy $S(3)$, $A(4)$ i $S(4)$ są rozwiązalne, ale nie są nilpotentne;
 - (d) grupy Q_8 i $D(8)$ są nilpotentne stopnia 2;
 - (e) jeśli p i q są liczbami pierwszymi i grupa G rzędu pq jest nieabelowa, to G nie jest grupą nilpotentną;
 - (f) grupa $D(12)$ nie jest nilpotentna;
 - (g) nie istnieje 12-elementowa nilpotentna grupa nieabelowa.
- (13) Udowodnić, że każda grupa rzędu p^n , gdzie p jest liczbą pierwszą, jest nilpotentna stopnia $\leq n$.
- (14) Wykazać, że jeśli dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ G_i jest grupą nilpotentną stopnia $\leq n$, to grupa $G_1 \times \dots \times G_n$ jest nilpotentna stopnia $\leq n$.