

Zestaw zadań 3: p -grupy i twierdzenie Sylowa.

- (1) Niech G będzie dowolną grupą. Sprawdzić, czy wzory

$$\begin{aligned}x^0 &= 1 \\x^{n+1} &= xx^n \\x^{-n} &= (x^n)^{-1}\end{aligned}$$

określają działanie grupy $\mathbb{Z}$ na zbiorze elementów grupy G .

- (2) Grupy rzędu p^2 :

- (a) Udowodnić, że jeśli grupa ilorazowa $G/Z(G)$ jest cykliczna, to grupa G jest abelowa;
- (b) Udowodnić, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to każda grupa rzędu p^2 jest abelowa;
- (c) Wykazać, że każda grupa rzędu p^2 , gdzie p jest liczbą pierwszą, jest izomorficzna bądź z $\mathbb{Z}_{p^2}$, bądź z $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

- (3) W zbiorze $\mathbb{Z}_p^3$ działanie $\star$ określono wzorem

$$(x_1, x_2, x_3) \star (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1 + x_3 y_2, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

- (a) Sprawdzić, że $\mathbb{Z}_p^3$ z działaniem $\star$ jest grupą nieabelową;
- (b) Sprawdzić, że w tej grupie zachodzi tożsamość

$$n \cdot (x_1, x_2, x_3) = \left(nx_1 + \binom{n}{2} x_2 x_3, nx_2, nx_3 \right);$$

- (c) Sprawdzić, że dla nieparzystej liczby pierwszej p w tej grupie zachodzi tożsamość

$$p \cdot (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0).$$

- (4) Niech G będzie p -grupą oraz H jej dzielnikiem normalnym. Dowieść, że:

- (a) jeśli $H \neq \{1\}$, to $|Z(G) \cap H| \geq p$;
- (b) jeśli $|H| = p$, to $H < Z(G)$.

- (5) Niech G będzie p -grupą, $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G/H$ i niech $\kappa : G \rightarrow G/H$ będzie epimorfizmem kanonicznym. Wykazać, że $\kappa^{-1}(K) \triangleleft G$ oraz że jeśli $|H| = p^l$, $|K| = p^k$, to $|\kappa^{-1}(K)| = p^{l+k}$.

- (6) Niech G będzie grupą rzędu p^n , gdzie p jest liczbą pierwszą. Wykazać, że dla każdego $0 \leq m \leq n$ grupa G zawiera podgrupę normalną rzędu p^m .

- (7) Wykazać, że jeśli podgrupa H p -grupy G ma indeks p w grupie G , to jest podgrupą normalną.

- (8) Niech p będzie liczbą pierwszą oraz G będzie grupą nieabelową rzędu p^3 . Udowodnić, że $[G, G] = Z(G)$ oraz $|Z(G)| = p$.

- (9) Niech G będzie grupą rzędu p^n , gdzie p jest liczbą pierwszą. Udowodnić, że G zawiera podgrupy F_i , $i = 0, 1, \dots, n$ takie, że:

- (a) $\{1\} = F_0 \triangleleft F_1 \triangleleft \dots \triangleleft F_n = G$,
- (b) $|F_i| = p^i$, $i = 0, 1, \dots, n$,
- (c) $F_i \triangleleft G$, $i = 0, 1, \dots, n$,
- (d) $F_i/F_{i-1} \cong \mathbb{Z}_p$, $i = 0, 1, \dots, n$.

- (10) Udowodnić, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, m liczbą naturalną niepodzielną przez p oraz k jest dowolną liczbą naturalną, to

$$\binom{p^k m}{p^k} \equiv m \pmod{p}.$$

(Wskazówka: Rozważyć wielomian $X + 1 \in \mathbb{Z}_p[X]$. Metodą indukcji pokazać następującą równość wielomianów:

$$(X + 1)^{p^k} = X^{p^k} + 1 \text{ w } \mathbb{Z}_p[X].$$

Wykorzystując tę równość obliczyć dwoma sposobami współczynniki wielomianu $(X + 1)^{p^k m} \in \mathbb{Z}_p[X]$ i porównać współczynniki przy $X^{p^k(m-1)}$.

- (11) Wyznaczyć wszystkie 2-podgrupy Sylowa i 3-podgrupy Sylowa w grupie:
 - (a) $D(3)$,
 - (b) $\mathbb{Z}_{36}$,
 - (c) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$,
 - (d) $S(4)$.
- (12) Wykazać, że grupa rzędu 15 jest cykliczna. (Wskazówka: Wykorzystując twierdzenia Sylowa pokazać, że grupa rzędu 15 zawiera element rzędu 15).
- (13) Wykazać, że dowolna grupa rzędu 12 zawiera właściwy dzielnik normalny. (Wskazówka: Zbadać liczbę 3-podgrup Sylowa).
- (14) Niech $p > q$ będą liczbami pierwszymi. Udowodnić, że jeśli q nie jest dzielnikiem liczby $p - 1$, to grupa rzędu pq jest cykliczna.
- (15) Dowieść, że część wspólna wszystkich p -podgrup Sylowa grupy G jest jej podgrupą normalną. (Wskazówka: Zauważyć, że jeśli $H < G$, to $\bigcap \{g^{-1}Hg : g \in G\} \triangleleft G$.)
- (16) Niech G będzie grupą skończoną. Wykazać, że jeśli istnieje liczba pierwsza p dzieląca rząd grupy G taka, że $(s_p)! < |G|$, to G zawiera właściwą podgrupę normalną. (Wskazówka: Pokazać, że jeśli H_i , $i = 1, \dots, d_p$ są p -podgrupami Sylowa grupy G , to odwzorowanie $G \rightarrow S(s_p)$ takie, że $g \mapsto \begin{pmatrix} H_1 & \cdots & H_{d_p} \\ i_g(H_1) & \cdots & i_g(H_{d_p}) \end{pmatrix}$ jest homomorfizmem grup o nietrywialnym jądrze.)
- (17) Udowodnić, że jeśli grupa G zawiera podgrupę o indeksie n oraz $|G| > n!$, to G zawiera właściwą podgrupę normalną. (Wskazówka: Pokazać, że jeśli H jest podgrupą grupy G o indeksie n , oraz $a_1H, \dots, a_nH$ są wszystkimi parami różnymi warstwami względem H , to odwzorowanie $G \rightarrow S(n)$ takie, że $g \mapsto \begin{pmatrix} a_1H & \cdots & a_nH \\ ga_1H & \cdots & ga_nH \end{pmatrix}$ jest homomorfizmem grup o nietrywialnym jądrze.)
- (18) Niech G będzie grupą rzędu pq , gdzie p, q są różnymi liczbami pierwszymi oraz $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wykazać, że jeśli rząd liczby p , w grupie $U(\mathbb{Z}_q)$, jest większy od a , to G ma tylko jedną q -podgrupę Sylowa.