

Zestaw zadań 2: Działanie grupy na zbiorze.

- (1) Działanie β grupy G na zbiorze X nazywamy działaniem **trywialnym** gdy $T : G \rightarrow S(X)$, $T(g) = \beta(g, \cdot)$ jest homomorfizmem trywialnym. Sprawdzić, że w każdym z następujących przypadków jedyne możliwe działanie grupy G na zbiorze X to działanie trywialne:
- (a) X - zbiór jednoelementowy, G - dowolna grupa;
 - (b) X - zbiór dwuelementowy, G - dowolna grupa rzędu nieparzystego;
 - (c) X - zbiór dwuelementowy, $G = A(n)$, $n \geq 1$;
 - (d) X - zbiór trzejelementowy, G - grupa skończona rzędu $6k \pm 1$;
 - (e) X - zbiór n -elementowy, G - grupa rzędu p , gdzie p jest liczbą pierwszą, $p > n$.

- (2) Działanie grupy G na zbiorze G swoich elementów określone jest wzorem

$$T(g, x) = gxg^{-1}.$$

Czym są orbity tego działania? Czym jest stabilizator elementu x ? Co tworzą punkty stałe tego działania?

- (3) Działanie grupy G na zbiorze $\mathfrak{G}$ jej wszystkich podgrup określone jest wzorem

$$T(g, H) = gHg^{-1}.$$

Czym są orbity tego działania? Czym jest stabilizator elementu H ? Czym są punkty stałe tego działania?

- (4) Grupa symetryczna $S(6)$ działa na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ według wzoru

$$T(\sigma, (a, b)) = (\sigma(a), \sigma(b)).$$

Wyznaczyć wszystkie orbity tego działania.

- (5) Wyznaczyć wszystkie orbity przy działaniu

$$T(A, v) = Av$$

grupy $GL(n, K)$ na zbiorze K^n .

- (6) Wyznaczyć wszystkie orbity przy działaniu

$$T(A, (v, w)) = (Av, Aw)$$

grupy $GL(n, K)$ na zbiorze $K^n \times K^n$.

- (7) Sprawdzić, że wzór

$$T((A, B), C) = ACB^{-1}$$

określa działanie grupy $GL(n, K) \times GL(m, K)$ na zbiorze K_m^n macierzy o n wierszach i m kolumnach. Wyznaczyć orbity tego działania.

- (8) Sprawdzić, że wzór

$$T((A, B), C) = ACB^{-1}$$

określa działanie grupy $SL(n, K) \times SL(n, K)$ na zbiorze K_n^n macierzy o n wierszach i n kolumnach. Wyznaczyć orbity tego działania.

- (9) Sprawdzić, że wzór

$$T((A, B), C) = ACB^T$$

określa działanie grupy $GL(n, K) \times GL(n, K)$ na zbiorze S_n macierzy symetrycznych o n wierszach i n kolumnach. Dla $K = \mathbb{R}$ i $K = \mathbb{C}$ wyznaczyć orbity tego działania.

(10) Grupa

$$SO(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

izometrii parzystych płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ działa na zbiorze $\mathbb{R}^2$. Wyznaczyć (i narysować przykładowe) orbity tego działania.

(11) Niech $V = (\mathbb{R}^2, \eta)$ będzie płaszczyzną hiperboliczną z formą kwadratową

$$q_\eta \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = xy.$$

Wyznaczyć grupy $O(\eta)$ automorfizmów ortogonalnych i $SO(\eta)$ izometrii parzystych tej przestrzeni ortogonalnej. Dla działania

$$T(\phi, v) = \phi(v)$$

każdej z tych grup na zbiorze $\mathbb{R}^2$ wyznaczyć (i narysować przykładowe) orbity tego działania.

(12) G jest grupą skończoną, a $X = 2^G$ - zbiorem wszystkich podzbiorów tej grupy. Sprawdzić, że wzór

$$T(g, Y) = gY = \{gy : y \in Y\}$$

określa działanie grupy G na zbiorze X . Niech $X_n = \{Y \in X : |Y| = n\}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots, |G|$. Sprawdzić, że każdy zbiór X_n jest niezmienniczy. Niech $Y \in X$ będzie podzbiorem grupy G spełniającym dwa warunki:

(a) $y \in Y \Rightarrow y^{-1} \in Y$,

(b) $Y \in \text{Stab}(Y)$.

Sprawdzić, że wtedy Y jest podgrupą grupy G i $Y = \text{Stab}(Y)$.

(13) Działanie grupy G na zbiorze X nazywamy działaniem przechodnim (działaniem tranzytywnym) gdy

$$\forall x \in X \forall x' \in X \exists g \in G [gx = x']$$

. Ile orbit ma działanie przechodnie?

(14) Dla danej grupy G i jej podgrupy H znaleźć taki zbiór X oraz określić działanie G na X , takie że G działa przechodnio na X oraz podgrupa H jest stabilizatorem pewnego elementu zbioru X .

(15) Niech $T : G \times X \rightarrow X$ będzie działaniem grupy G na zbiorze niepustym X . Sprawdzić, że wzór

$$T_k(g, (x_1, x_2, \dots, x_k)) = (T(g, x_1), T(g, x_2), \dots, T(g, x_k))$$

określa działanie grupy G na zbiorze X^k . Sprawdzić, że zbiór

$$\widehat{X^k} = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k : |\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| = k\}$$

jest podzbiorem niezmienniczym tego działania.

(16) Niech podgrupa H grupy symetrycznej $S(n)$ działa w naturalny sposób na zbiorze liter $X = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$T(\sigma, i) = \sigma(i).$$

Grupa H jest k -krotnie tranzytywna gdy jej działanie T_k na zbiorze $\widehat{X^k}$ jest przechodnie. Sprawdzić, że $S(n)$ jest n -krotnie tranzytywna i grupa $A(n)$ jest $(n-2)$ -krotnie tranzytywna.

(17) Co można powiedzieć o stabilizatorach $\text{Stab}(x)$ i $\text{Stab}(y)$ gdy x i y należą do jednej orbity?

(18) Niech grupa G działa na zbiorze X , a elementy x, y należą do jednej orbity. Jakim podzbiorem grupy G jest zbiór $\{g \in G : g(x) = y\}$?

- (19) Niech β będzie działaniem grupy G na zbiorze X . Zbiór $Stab(X) = \{g \in G : \forall x \in X [gx = x]\}$ nazywa się **stabilizatorem zbioru** X . Jeżeli $Stab(X) = \{1\}$, to mówimy, że G działa **efektywnie** na zbiorze X . Pokazać, że:
- (a) $Stab(X) = Ker T$, gdzie $T(g) = \beta(g, \cdot)$. W szczególności $Stab(X)$ jest podgrupą normalną grupy G ;
 - (b) $Stab(X) = \bigcap \{Stab(x) : x \in X\}$;
 - (c) Grupa ilorazowa $G/Stab(X)$ działa efektywnie na zbiorze X .
- (20) Niech X będzie zbiorem trzynastoelementowym. Wykazać, że każde działanie grupy dziewięcioelementowej na X ma co najmniej jeden element stały. Wskazać działanie dwunastoelementowej grupy cyklicznej na X bez elementów stałych.
- (21) Niech grupa G działa na zbiorze G swoich elementów przez automorfizmy wewnętrzne:

$$T(g, x) = gxg^{-1}.$$

Sprawdzić, że dla działania T_k zbiór

$$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in G^k : x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = 1\}$$

jest podzbiorem niezmienniczym. Obliczyć, ile elementów ma zbiór X gdy rząd grupy G jest równy n .

- (22) Niech G będzie grupą skończoną, a p najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą rząd $n = |G|$ grupy G . Wykazać, że podgrupa H indeksu p w grupie G jest normalna.