

Zestaw zadań 13: rozszerzenia pierwiastnikowe, elementy wyrażające się przez pierwiastniki, rozwiązalność równań przez pierwiastniki, równania o dowolnych współczynnikach.

- (1) Wyrazić przez pierwiastniki pierwiastki następujących wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_2$:
 - (a) $x^2 + x + 1$,
 - (b) $x^3 + x + 1$.
- (2) Wykazać, że każdy element algebraiczny nad ciałem skończonym wyraża się przez pierwiastniki.
- (3) Rozważmy ciała $L = \overline{\mathbb{Z}_2}(t)$ i $F = \overline{\mathbb{Z}_2}(t^2 + t)$. Wykazać, że pierwiastki wielomianu $x^2 + x + t^2 + t \in F[x]$ należą do ciała L , ale nie wyrażają się przez pierwiastniki.
- (4) Wykazać, że równanie $x^6 + px^3 + q = 0$ o współczynnikach w ciele F , $\text{char} F \neq 2, 3$ jest rozwiązalne przez pierwiastniki.
- (5) Wykazać, że równanie $x^6 + px^4 + qx^2 + r = 0$ o współczynnikach w ciele F , $\text{char} F \neq 2, 3$ jest rozwiązalne przez pierwiastniki.
- (6) **Równaniem symetrycznym stopnia n** nazywamy równanie

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

w którym $a_k = a_{n-k}$, dla $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ oraz $a_n \neq 0$. Wykazać, że równanie symetryczne stopnia ≤ 9 jest rozwiązalne przez pierwiastniki, o ile charakterystyka ciała, z którego pochodzą współczynniki nie jest równa 2 ani 3.