

Zestaw zadań 12: ciało elementów stałych, grupa Galois, rozszerzenia Galois, grupa Galois wielomianu, zasadnicze twierdzenia teorii Galois.

- (1) Wyznaczyć wszystkie automorfizmy ciała
 - (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
 - (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,
 - (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
- (2) Wyznaczyć wszystkie automorfizmy ciała rozkładu wielomianu $x^4 - 2$ nad $\mathbb{Q}$.
- (3) Wyznaczyć wszystkie automorfizmy ciała
 - (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,
 - (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})$.
- (4) Udowodnić, że jedynym automorfizmem ciała liczb rzeczywistych jest identyczność.
- (5) Wyznaczyć wszystkie automorfizmy ciała liczb algebraicznych rzeczywistych.
- (6) Czy jeśli ciało L nie ma nietrywialnych automorfizmów, to również jego dowolne podciało F nie ma automorfizmów nietrywialnych?
- (7) Wyznaczyć grupę automorfizmów ciała 9-elementowego.
- (8) Wykazać, że grupa wszystkich automorfizmów ciała skończonego jest cykliczna.
- (9) Uzasadnić, że ciało $\mathbb{R}$ nie jest rozszerzeniem Galois żadnego podciała właściwego.
- (10) Niech L będzie skończonym rozszerzeniem normalnym ciała $\mathbb{Q}$ zawartym w $\mathbb{C}$. Pokazać, że jeśli $[L : \mathbb{Q}]$ jest liczbą nieparzystą, to $L \subset \mathbb{R}$.
- (11) Wyznaczyć podciało elementów stałych względem grupy wszystkich automorfizmów ciała
 - (a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,
 - (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
- (12) Wyznaczyć wszystkie podgrupy grupy automorfizmów ciała $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})$. Dla każdej z nich wskazać ciało elementów stałych.
- (13) Wyznaczyć wszystkie podgrupy grupy automorfizmów ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Dla każdej z nich wskazać ciało elementów stałych.
- (14) Wyznaczyć grupę Galois następujących rozszerzeń:
 - (a) $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$,
 - (b) $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt[6]{2})$.
 Które z nich są rozszerzeniami Galois?
- (15) zilustrować zasadnicze twierdzenia teorii Galois na przykładzie ciała rozkładu nad $\mathbb{Q}$ wielomianu
 - (a) $x^4 + x^2 - 6$,
 - (b) $x^3 - 3$,
 - (c) $x^4 - 5$.
- (16) Podać przykład takiego ciała liczbowego L , by grupa jego automorfizmów była
 - (a) grupą cykliczną rzędu 2,
 - (b) grupą cykliczną rzędu 4,
 - (c) grupą czwórkową Kleina,
 - (d) grupą cykliczną rzędu 6,
 - (e) grupą niecykliczną rzędu 6,
 - (f) grupą cykliczną rzędu 3,
 - (g) grupą cykliczną rzędu 5.
- (17) Udowodnić, że grupa Galois rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$, gdzie ξ_n jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia n , jest przemienna, a w przypadku, gdy n jest liczbą pierwszą – cykliczna.

- (18) Wyznaczyć grupę Galois rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$, gdzie ξ_n jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia n , oraz
- $n = 12$,
 - $n = 15$,
 - $n = 16$.
- (19) Zilustrować zasadnicze twierdzenia teorii Galois na przykładzie rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$, gdzie ξ_n jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia n , oraz
- $n = 5$,
 - $n = 7$,
 - $n = 9$.
- (20) Wykazać, że istnieje dokładnie jeden automorfizm f ciała $F(x)$ stały na F , przy którym
- $f(x) = x$,
 - $f(x) = -x$,
 - $f(x) = \frac{1}{x}$,
 - $f(x) = -\frac{1}{x}$.
- Wyznaczyć ciało elementów stałych względem tego automorfizmu.
- (21) Wyznaczyć podciało elementów stałych ciała $F(x)$ ze względu na zbiór automorfizmów spełniających warunek
- $f(x) = x$,
 - $f(x) = -x$,
 - $f(x) = \frac{1}{x}$,
 - $f(x) = -\frac{1}{x}$.
- Wyznaczyć grupę Galois rozszerzenia
- $\mathbb{Z}_3(x^2) \subset \mathbb{Z}_3(x)$,
 - $\mathbb{Z}_3(x^3) \subset \mathbb{Z}_3(x)$,
 - $\mathbb{Z}_3(x^4) \subset \mathbb{Z}_3(x)$.
- Które z powyższych rozszerzeń jest Galois?
- (22) Wykazać, że istnieje dokładnie jeden automorfizm f ciała $F(x, y)$ stały na F , przy którym
- $f(x) = x, f(y) = y$,
 - $f(x) = -x, f(y) = y$,
 - $f(x) = x, f(y) = -y$,
 - $f(x) = -x, f(y) = -y$,
- Wyznaczyć ciało elementów stałych względem tego automorfizmu.
- (23) Wyznaczyć podciało elementów stałych ciała $F(x, y)$ ze względu na zbiór automorfizmów spełniających warunek
- $f(x) = x, f(y) = y$,
 - $f(x) = -x, f(y) = y$,
 - $f(x) = x, f(y) = -y$,
 - $f(x) = -x, f(y) = -y$,
- (24) Wykazać, że istnieje dokładnie jeden automorfizm f ciała $\mathbb{Z}_3(x)$ taki, że $f(x) = x + 1$. Wyznaczyć ciało elementów stałych względem tego automorfizmu.
- (25) Wykazać, że istnieje dokładnie jeden automorfizm f ciała $\mathbb{Z}_3(x)$ taki, że $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Wyznaczyć ciało elementów stałych względem tego automorfizmu. Wyznaczyć podciało elementów stałych ciała $\mathbb{Z}_3(x)$ ze względu na zbiór automorfizmów spełniających warunek $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

- (26) Zilustrować zasadnicze twierdzenia teorii Galois na przykładzie rozszerzenia:
- (a) $F(x^2 + \frac{1}{x^2}) \subset F(x)$,
 - (b) $F(x^2, y^2) \subset F(x, y)$,
 - (c) $\mathbb{Z}_3(x^6 + x^4 + x^2) \subset \mathbb{Z}_3(x)$.
- (27) Wykazać, że istnieje dokładnie jeden automorfizm f ciała $\mathbb{Q}(x)$ taki, że $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
Wyznaczyć ciało elementów stałych względem automorfizmu spełniającego warunek
- (a) $f(x) = -x$,
 - (b) $f(x) = 2x$,
 - (c) $f(x) = x + 1$.
- Wyznaczyć podciało elementów stałych ciała $\mathbb{Q}(x)$ ze względu na zbiór automorfizmów spełniających wszystkie powyższe warunki.
- (28) Pokazać, że każde rozszerzenie $F \subset L$, w którym ciała F i L są skończone, jest rozszerzeniem Galois. Uzasadnić, że grupa Galois takiego rozszerzenia jest cykliczna.
- (29) Niech F będzie ciałem, $\text{char} F = 2$. Które z następujących rozszerzeń jest Galois:
- (a) $F(x^2 + x) \subset F(x)$,
 - (b) $F(x^2) \subset F(x)$?