

Zestaw zadań 11: elementy rozdzielcze, rozszerzenia rozdzielcze i pojedyncze, rozszerzenia normalne.

- (1) Pokazać, że jeśli F jest ciałem skończonym, to każdy element algebraiczny nad F jest skończony.
- (2) Podać przykład ciała F i elementu algebraicznego nierozdzielczego nad F .
- (3) Znaleźć element pierwotny rozszerzenia:
 - (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$,
 - (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$,
 - (c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3} + i, \sqrt{2} - i)$,
 - (d) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$,
 - (e) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{2} + i, \sqrt{3} - i)$.
- (4) Niech F będzie ciałem, $\text{char} F \neq 2$, niech $L = F(x^2, y^2)$, $M = F(x, y)$. Wykazać, że istnieje taki element $c \in M$, że $M = L(c)$.
- (5) Niech F będzie ciałem, $\text{char} F = 2$, niech $L = F(x^2, y^2)$, $M = F(x, y)$. Wykazać, że istnieje taki element $c \in M$, że $M = L(c)$.
- (6) Dla dowolnej liczby pierwszej p podać przykład rozszerzenia skończonego ciała charakterystyki p nie mającego elementu pierwotnego.
- (7) Podać przykład takich elementów algebraicznych a, b nad ciałem $\mathbb{Q}$, aby $\mathbb{Q}(a + b) \neq \mathbb{Q}(a, b)$.
- (8) Podać przykład rozszerzenia skończonego, dla którego istnieje nieskończenie wiele ciał pośrednich.
- (9) Niech $F \subset L$. Pokazać, że liczba ciał pośrednich pomiędzy F i L jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy L jest rozszerzeniem pojedynczym F .
- (10) Które z następujących rozszerzeń są normalne:
 - (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
 - (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,
 - (c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$,
 - (d) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$,
 - (e) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi_3)$, gdzie ξ_3 oznacza pierwiastek pierwotny z jedynki stopnia 3,
 - (f) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$,
 - (g) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,
 - (h) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$,
 - (i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}, i)$,
 - (j) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, i)$,
 - (k) $\mathbb{Q}(x^2) \subset \mathbb{Q}(x)$,
 - (l) $\mathbb{Q}(x^3) \subset \mathbb{Q}(x)$,
 - (m) $\mathbb{C}(x^3) \subset \mathbb{C}(x)$,
 - (n) $\mathbb{C}(x^n) \subset \mathbb{C}(x)$,
 - (o) $\mathbb{Z}_3(x^2) \subset \mathbb{Z}_3(x)$,
 - (p) $\mathbb{Z}_3(x^3) \subset \mathbb{Z}_3(x)$,
 - (q) $\mathbb{Z}_3(x^4) \subset \mathbb{Z}_3(x)$?
- (11) Znaleźć najmniejsze rozszerzenie normalne ciała $\mathbb{Q}$ zawierające ciało
 - (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
 - (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,
 - (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
- (12) Znaleźć najmniejsze ciało zawierające $\mathbb{Q}(x)$ będące rozszerzeniem normalnym ciała
 - (a) $\mathbb{Q}(x^3)$,

- (b) $\mathbb{Q}(x^4)$,
 - (c) $\mathbb{Q}(x^n)$.
- (13) Znaleźć najmniejsze ciało zawierające $\mathbb{Z}_3(x)$ będące rozszerzeniem normalnym ciała $\mathbb{Z}_3(x^4)$.
- (14) Udowodnić, że jeżeli ξ_n jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia n , to $\mathbb{Q}(\xi_n)$ jest rozszerzeniem normalnym ciała $\mathbb{Q}$.