

Zestaw zadań 10: baza i stopień rozszerzenia, elementy algebraiczne i przestępne, rozszerzenia algebraiczne i skończone.

- (1) Wykazać, że jeśli ciało L jest rozszerzeniem ciała K oraz $[K : L]$ jest liczbą pierwszą, to dla każdego $\alpha \in L \setminus K$ jest $L = K(\alpha)$.
- (2) Podać bazę i określić stopień nad $\mathbb{Q}$ każdego z następujących ciał:
 - (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$,
 - (b) $\mathbb{Q}(2 + \sqrt{3})$,
 - (c) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$,
 - (d) $\mathbb{Q}(i + \sqrt{3})$,
 - (e) $\mathbb{Q}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{3})$,
 - (f) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$,
 - (g) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$,
 - (h) $\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{2}{3}})$,
 - (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$,
 - (j) $\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}})$.
- (3) Wykazać, że jeśli α, β są elementami algebraicznymi nad ciałem K stopni odpowiednio n, m , przy czym $\text{NWD}(m, n) = 1$, to $[K(\alpha, \beta) : K] = nm$.
- (4) Wykazać, że jeśli $a_1, \dots, a_n$ są elementami algebraicznymi nad ciałem K , to $[K(a_1, \dots, a_n) : K] \leq \text{sta}_1 \dots \text{sta}_n$.
- (5) Dowieść, że liczba zespolona z jest liczbą algebraiczną wtedy i tylko wtedy, gdy liczba sprzężona $\bar{z}$ jest liczbą algebraiczną.
- (6) Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że liczba zespolona $a + bi$ jest liczbą algebraiczną wtedy i tylko wtedy, gdy a i b są liczbami algebraicznymi.
- (7) Dowieść, że jeśli $K < L$, element $a \in L$ jest algebraiczny nad ciałem K oraz $b \in L$ jest elementem przestępnym nad K , to elementy $a + b$, ab są przestępne nad K .
- (8) Które z następujących liczb są algebraiczne? W przypadku liczb algebraicznych określić ich stopień (tzn. stopień nad ciałem liczb wymiernych):
 - (a) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$,
 - (b) $\sqrt{\pi} + 1$,
 - (c) $\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}$,
 - (d) $e - 1$.
- (9) Uwolnić od niewymierności w mianowniku następujące ułamki:
 - (a) $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{5}}$,
 - (b) $\frac{1}{2 + \sqrt{5} + \sqrt{-1 - \sqrt{5}}}$,
 - (c) $\frac{10}{\sqrt[3]{4} + 3 + \sqrt[3]{2}}$.
- (10) Każdy z elementów
 - (a) $\frac{\sqrt[4]{8}}{1 + \sqrt[4]{2}}$,
 - (b) $\frac{1 + \sqrt[4]{2}}{3 - \sqrt[4]{8}}$,

$$(c) \frac{1}{1 + \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8}}$$

ciała $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ przedstawić w postaci kombinacji liniowej elementów bazy potęgowej rozszerzenia $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$.

(11) Niech α będzie pierwiastkiem wielomianu $X^3 + 3X^2 - 9X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$. Każdy z elementów

$$(a) \alpha^5,$$

$$(b) \alpha^4 + \alpha,$$

$$(c) \frac{1}{\alpha},$$

$$(d) \frac{\alpha^4 + 3\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha - 11}$$

ciała $\mathbb{Q}(\alpha)$ przestawić w postaci kombinacji liniowej bazy potęgowej rozszerzenia $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$.

(12) Niech β będzie pierwiastkiem wielomianu $X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Każdy z elementów

$$(a) \frac{1}{\beta^2 - 1},$$

$$(b) \frac{\beta^4}{1 + \beta}$$

ciała $\mathbb{Q}(\beta)$ przestawić w postaci kombinacji liniowej bazy potęgowej rozszerzenia $\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$.

(13) Znaleźć rozszerzenie ciała $\mathbb{Q}$ będące ciałem rozkładu wielomianu

$$(a) X^2 - 2,$$

$$(b) X^4 + X^2 + 1,$$

$$(c) X^3 - 2,$$

$$(d) X^4 + 2.$$

(14) Określić stopień nad $\mathbb{Q}$ i znaleźć ciało rozkładu wielomianu

$$(a) (X^2 - 2)(X^2 - 5),$$

$$(b) X^4 - X^2 + 1,$$

$$(c) X^4 - 7,$$

$$(d) X^3 - 2,$$

$$(e) X^p - 1,$$

gdzie p jest liczbą pierwszą.

(15) Niech $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}_3$ będzie pierwiastkiem wielomianu $f(X) = X^3 + X^2 + 2$. Wypisać wszystkie elementy ciała $\mathbb{Z}_3(\alpha)$ oraz obliczyć sumy i iloczyny wybranych elementów tego ciała.

(16) Zbudować ciało 4-elementowe oraz ciało 9-elementowe jako rozszerzenia odpowiednich ciał prostych. Wypisać wszystkie elementy tych ciał, zbudować tabelki działań w tych ciałach.