

Zestaw zadań 1: Normalizator, centralizator, komutant.

- (1) Dowieść, że centralizator dowolnego podzbioru M grupy G jest podgrupą grupy G .
- (2) Dowieść, że normalizator podgrupy H grupy G jest podgrupą zawierającą centralizator tej podgrupy.
- (3) Dowieść, że centrum grupy G jest jej podgrupą normalną.
- (4) Wykazać, że centralizator podgrupy normalnej jest podgrupą normalną.
- (5) Dowieść, że normalizator podgrupy $H \subset G$ jest największą podgrupą, w której H jest podgrupą normalną.
- (6) Wyznaczyć normalizator $N(H)$ podgrupy H w grupie G , jeśli
 - (a) $G = GL(2, \mathbb{R})$, a H jest podgrupą macierzy diagonalnych;
 - (b) $G = GL(2, \mathbb{R})$, a H jest podgrupą macierzy postaci $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;
 - (c) $G = S(4)$, $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$.
- (7) Wyznaczyć centrum i wszystkie klasy elementów sprzężonych w grupie kwaternionowej Q_8 .
- (8) Wyznaczyć centrum grupy
 - (a) $S(n)$;
 - (b) $A(n)$;
 - (c) $D(n)$.
- (9) Wykazać, że centrum grupy rzędu p^n , gdzie p jest liczbą pierwszą, a $n \in \mathbb{N}$, zawiera więcej niż jeden element.
- (10) Niech G będzie zbiorem górnótrójkątnych macierzy stopnia 3 o elementach z ciała $\mathbb{Z}_p$, mających jedynkę na każdym miejscu głównej przekątnej.
 - (a) Wykazać, że G jest grupą przemienną rzędu p^3 względem mnożenia.
 - (b) Wyznaczyć centrum grupy G .
 - (c) Wyznaczyć wszystkie klasy elementów sprzężonych grupy G .
- (11) Wyznaczyć centrum grupy:
 - (a) $GL(2, \mathbb{R})$;
 - (b) $O(2, \mathbb{R})$ (grupa macierzy ortogonalnych stopnia 2 nad $\mathbb{R}$);
 - (c) $SO(2, \mathbb{R})$ (grupa macierzy ortogonalnych stopnia 2 nad $\mathbb{R}$ o wyznaczniku 1);
 - (d) $SO(3, \mathbb{R})$;
 - (e) $SU(3, \mathbb{C})$ (grupa macierzy unitarnych stopnia 2 nad $\mathbb{C}$);
 - (f) $SU(n, \mathbb{C})$.
- (12) Wyznaczyć komutator macierzy nieosobliwych:
 - (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
 - (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$;
 - (c) dwóch transpozycji w grupie symetrycznej $S(n)$.
- (13) Dowieść następujących własności komutanta $[G, G]$ grupy G :
 - (a) $[G, G]$ jest podgrupą normalną G ;
 - (b) grupa ilorazowa $G/[G, G]$ jest przemienna;
 - (c) jeśli N jest podgrupą normalną G i G/N jest przemienna, to $[G, G] \subset N$.
- (14) Wykazać, że jeśli $\phi : G \rightarrow H$ jest homomorfizmem, to $\phi([G, G]) = [\phi(G), \phi(G)]$.
- (15) Skonstruować bijekcję między homomorfizmami grupy w grupy abelowe i homomorfizmami jej grupy ilorazowej przez komutant.

- (16) Wykazać, że komutant grupy $GL(2, K)$ jest zawarty w $SL(2, K)$.
- (17) Wyznaczyć komutant grupy $GL(2, K)$.
- (18) Wyznaczyć komutant grupy $GL(n, K)$.
- (19) Wykazać, że komutant iloczynu prostego jest iloczynem prostym komutantów czynników.
- (20) Wyznaczyć komutanty i rzędy grupy ilorazowej przez komutant następujących grup:
 - (a) $S(3)$;
 - (b) $A(4)$;
 - (c) $S(4)$;
 - (d) Q_8 .
- (21) Wyznaczyć komutanty grup
 - (a) $S(n)$;
 - (b) $D(n)$.
- (22) Wykazać, że komutant podgrupy normalnej jest podgrupą normalną całej grupy.
- (23) *Ciągiem komutantów* (lub *ciągami pochodnym*) grupy G nazywa się ciąg podgrup

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \dots$$

gdzie $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$. Wykazać, że

- (a) wszystkie wyrazy ciągu komutantów są normalnymi podgrupami G ;
- (b) dla każdego homomorfizmu ϕ grupy G na grupę H zachodzi $\phi(G^{(i)}) = H^{(i)}$.