Zestaw zadań 6: Rzędy macierzy. [1] **Struktura zbioru rozwiązań układu równań.**

(1) Obliczyć rzędy następujących macierzy (nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych):

$$
\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad
\text{(b)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad
\text{(c)} \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix},
$$

$$
\text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad
\text{(e)} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \\ -5 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad
\text{(f)} \begin{bmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix},
$$

$$
\text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad
\text{(h)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad
\text{(i)} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\text{(j)} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

(2) Obliczyć rzędy następujących macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych:

$$
\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad
\text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad
\text{(c)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix},
$$

[1] Pojęcie rzędu macierzy wprowadził Sylvester.

(d) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}$, (g) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

(3) W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 10 \\ -1 & \lambda & -6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

(4) Obliczyć rzędy następujących macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{13}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

(5) Obliczyć rzędy następujących macierzy zespolonych:

(a) $\begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1+3i \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1+2i \\ 1-5i & -7-4i & 4-7i \\ 1-i & -1-2i & 2-i \\ 2+4i & 7-i & 1+7i \end{bmatrix}$.

(6) Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z, t dla których:

(a) $\begin{cases} x+4y+10z+20t = x \\ -6y-20z-45t = y \\ 4y+15z+36t = z \\ -y-4z-10t = t \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x+4y+10z+20t = -x \\ -6y-20z-45t = -y \\ 4y+15z+36t = -z \\ -y-4z-10t = -t \end{cases}$, (c) $t = 0$, (d) $x = y$.

Znaleźć bazę podprzestrzeni rozwiązań każdego z powyższych układów równań.

(7) W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

(a) $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-y+z=0 \\ 2x+ay+2z=b \end{cases}$, (b) $\begin{cases} ax+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=1 \\ x+y+z+t=b \end{cases}$.

(8) W zależności od parametru $a \in \mathbb{Z}_7$ wyznaczyć wymiary podprzestrzeni rozwiązań układów równań:

(a) $\begin{cases} 2x+2y+az+t=0 \\ x+y+6z+at=0 \\ x+y \qquad +2t=0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x+ay+4z+3t=0 \\ \qquad ay+3z+t=0 \end{cases}$.

(9) Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{Z}_7$, układy równań liniowych U_1 oraz U_2 (nad ciałem $\mathbb{Z}_7$) mają równe zbiory rozwiązań, jeżeli

$U_1 : \begin{cases} x+2y+6z+4t=1 \\ 3x+y+2z+t=0 \end{cases}$ $U_2 : \begin{cases} 5x+ay \qquad +2t=2 \\ 3x+5y+bz \qquad =1 \end{cases}$

(10) Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + lin(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix})$, (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + lin(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix})$,

(c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + lin(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$, (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + lin(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$.

(11) Rozwiązać za pomocą wzorów Cramera następujące układy równań:

(a) $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} x+y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ 3x-y-z-2t=-4 \\ 2x+3y-z-t=-6 \\ x+2y+3z-t=-4 \end{cases}$, (e) $\begin{cases} \qquad y-3z+4t=-5 \\ x \qquad -2z+3t=-4 \\ 3x+2y \qquad -5z=12 \\ 4x+3y-5z \qquad =5 \end{cases}$.

(12) W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

(a) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+by+z=3 \\ x+2by+z=4 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$.

(13) Dla jakich parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ każdy układ równań z danymi lewymi stronami ma rozwiązanie?

(a) $\begin{cases} ax+by+cz+dt \\ bx-ay+dz-ct \\ cx-dy-az+bt \\ dx+cy-bz-at \end{cases}$, (b) $\begin{cases} a^2x \qquad +ay \qquad +az \qquad +at \\ ax+(b^2-1)y+(2b+1)z+(3b+1)t \\ ax+(2b+1)y+(c^2+5)z+(3c+7)t \\ ax+(3b+1)y+(3c+7)+(d^2+1)t \end{cases}$.

Jak zmieni się odpowiedź, jeżeli dopuścić $a, b, c, d \in \mathbb{C}$? Podać wzory na rozwiązanie układu a) oraz b) (przy dowolnych prawych stronach równań).