

### Zestaw zadań 5: Przestrzenie wektorowe.

- (1) Wykazać, że  $V = \mathbb{C}$  ze zwykłym dodawaniem jako dodawaniem wektorów i operacją mnożenia przez skalar

$$\begin{aligned} * & : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ (z, v) & \mapsto z * v := \bar{z} \cdot v \end{aligned}$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych  $\mathbb{C}$ .

- (2) Niech  $V$  będzie zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich, a dodawanie wektorów niech będzie mnożeniem liczb. Operację mnożenia przez liczby rzeczywiste określimy następująco:

$$\begin{aligned} \cdot & : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \\ (a, v) & \mapsto v^a \end{aligned}$$

Wykazać, że wyżej opisana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

- (3) Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem oraz niech  $V = K^\infty$  (zbiór wszystkich nieskończonych ciągów elementów ciała  $K$ ). Określimy działania dodawania wektorów oraz mnożenia wektorów przez skalary z ciała  $K$  następująco:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \dots] + [b_1, b_2, \dots] & : = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots], \\ a \cdot [a_1, a_2, \dots] & : = [aa_1, aa_2, \dots]. \end{aligned}$$

Pokazać, że wyżej zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$ .

- (4) Niech  $A$  będzie niepustym zbiorem oraz niech  $K$  będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy symbolem  $K^A$  zbiór wszystkich funkcji  $A \rightarrow K$ . Sumą funkcji  $f : A \rightarrow K$  oraz funkcji  $g : A \rightarrow K$  nazywamy funkcję  $f + g : A \rightarrow K$  taką, że  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$  dla każdego  $a \in A$ . Iloczynem funkcji  $f : A \rightarrow K$  przez skalar  $x$  z ciała  $K$  nazywamy funkcję  $xf : A \rightarrow K$  taką, że  $(xf)(a) = xf(a)$  dla każdego  $a \in A$ . Pokazać, że tak zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem  $K$ .
- (5) Oznaczmy symbolem  $K[X]$  zbiór wszystkich wielomianów zmiennej  $X$  o współczynnikach z ciała  $K$ . Sprawdzić, że z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez elementy ciała  $K$ , zbiór  $K[X]$  jest przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$ .
- (6) Oznaczmy symbolem  $K(X)$  zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej  $X$  o współczynnikach z ciała  $K$ . Sprawdzić, że z działaniami dodawania funkcji wymiernych i mnożenia funkcji wymiernej przez element ciała  $K$  zbiór  $K(X)$  jest przestrzenią wektorów nad ciałem  $K$ .
- (7) *Macierz*<sup>1</sup> o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach nad ciałem  $K$  nazywamy układ (prostokątną tabliczkę)  $mn$  elementów ciała  $K$  (które nazywamy *elementami* albo *współczynnikami* macierzy) ułożonych w  $m$  wierszach i w  $n$  kolumnach. Element macierzy oznaczamy podając numer wiersza i numer kolumny, w których się on znajduje. W macierzach zmiennych na ogół elementy oznaczamy tą samą literą z numerem wiersza i numerem kolumny jako indeksami. Macierze zapisujemy w nawiasie kwadratowym. Na przykład dla  $n = m = 2$  równość

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Pojęcie macierzy wprowadzili angielscy matematycy: William Rowan Hamilton (1805 - 1865), Arthur Cayley (1821 - 1895) i John J. Sylvester (1814 - 1897) w latach 40-tych XIX w.

oznaczają, że  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = 2$ ,  $a_{21} = 3$ ,  $a_{22} = 4$ . Zbiór wszystkich macierzy o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach nad ciałem  $K$  oznaczamy symbolem  $K_n^m$ .

Sumą macierzy  $A = [a_{ij}]$  i macierzy  $B = [b_{ij}]$  nazywamy macierz  $A + B$  taką, że  $A + B = [c_{ij}]$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych  $i, j$  zachodzi równość  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Iloczynem macierzy  $A = [a_{ij}]$  przez element  $a$  ciała  $K$  nazywamy macierz  $aA$  tak, że  $aA = [c_{ij}]$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych  $i, j$  zachodzi równość  $c_{ij} = aa_{ij}$ . Wykazać, że  $K_n^m$  z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez element ciała  $K$  jest przestrzenią wektorową nad  $K$ .

- (8) Macierz  $S = [s_{ij}] \in K_n^n$  nazywamy **macierzą symetryczną**, gdy jej elementy  $s_{ij}$  spełniają warunki:  $s_{ij} = s_{ji}$  dla każdych  $i, j$ . Macierz  $A = [a_{ij}] \in K_n^n$  nazywamy **macierzą antysymetryczną**, gdy jej elementy  $a_{ij}$  spełniają warunki:  $a_{ij} = -a_{ji}$  dla każdych  $i, j$ . Sprawdzić, że każdy ze zbiorów: zbiór  $S_n$  wszystkich macierzy symetrycznych należących do  $K_n^n$  i zbiór  $A_n$  wszystkich macierzy antysymetrycznych należących do  $K_n^n$ , z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar, jest przestrzenią wektorów nad ciałem  $K$ .
- (9) Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem, a  $P(A)$  niech będzie zbiorem wszystkich jego podzbiorów. Działanie dodawania w zbiorze  $P(A)$  definiujemy następująco:  $B \div C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ . Mnożenie elementów  $P(A)$  przez elementy ciała  $\mathbb{Z}_2$  definiujemy w oczywisty sposób:  $0 \cdot B = \emptyset$ ,  $1 \cdot B = B$ . Sprawdzenie łączności działania  $\div$  jest dość kłopotliwe.
  - (a) Zakładając, że działanie  $\div$  jest łączne, sprawdzić, że spełnione są również pozostałe aksjomaty przestrzeni liniowej.
  - (b) Wykazać łączność działania  $\div$ .
- (10) Jaki warunek musi spełniać dodawanie w grupie addytywnej  $A$ , żeby mnożenie elementów tej grupy przez elementy ciała  $\mathbb{Z}_2$  zdefiniowane następująco:  $0 \cdot a = 0$ ,  $1 \cdot a = a$  było rozdzielne względem dodawania?
- (11) Niech  $V = \mathbb{C}^4$ ,  $U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in V : z_1 = z_2 = 0\}$ . Wektory dodawać będziemy w zwykły sposób natomiast mnożenie przez skalary definiujemy na cztery różne sposoby:
  - a)  $z\alpha = \theta$  dla  $z \in \mathbb{C}$  oraz  $\alpha \in V$ .
  - b)  $z\alpha = \alpha$  dla  $z \in \mathbb{C}$  oraz  $\alpha \in V$ .
  - c)  $z\alpha = (\operatorname{Re} z)\alpha$  dla  $z \in \mathbb{C}$  oraz  $\alpha \in V$ .
  - d)  $z\alpha = \begin{cases} z\alpha & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \in U \\ \bar{z}\alpha & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \notin U \end{cases}$ .
 Sprawdzić, że w każdym z czterech powyższych przykładów dokładnie jeden z aksjomatów przestrzeni liniowej nie jest spełniony.  
 Jaki wniosek związany z wzajemną zależnością aksjomatów przestrzeni liniowej można wyciągnąć z tego zadania?
- (12) Wykazać, że przemienność dodawania wynika z pozostałych aksjomatów przestrzeni wektorowej.
- (13) Pokazać, że jeśli  $U$  jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej  $V$  nad ciałem  $K$ , to  $U$  jest również przestrzenią liniową nad  $K$ .
- (14) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni  $K^4$  są podprzestrzeniami wektorowymi:
  - a)  $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\}$ ,
  - b)  $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\}$ ,
  - c)  $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$ ,
  - d)  $U = \{[x, y, z, t] : x+y-z=0\}$ ,
  - e)  $U = \{[x, y, z, t] : xy=0\}$ ,
  - f)  $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$ .
- (15) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  są podprzestrzeniami liniowymi:
  - a)  $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t \leq u\}$ ,

- b)  $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$ ,  
 c)  $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$ .
- (16) Niech  $\mathbb{R}^\infty$  będzie przestrzenią ciągów elementów ciała  $\mathbb{R}$  (zob. zadanie 3 z poprzedniego zestawu ??, str. ??). Zbadać, które spośród następujących zbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni  $\mathbb{R}^\infty$ :
- $U_1 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_{i+1} = a_i + a_{i-1} \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$ ;
  - $U_2 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1}) \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$ ;
  - zbiór wszystkich ciągów  $[a_1, a_2, \dots]$ , których prawie wszystkie wyrazy (wszystkie wyrazy z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby) są równe zero;
  - zbiór wszystkich ciągów ograniczonych.
- (17) Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem niepustym oraz niech  $V = \mathbb{R}^A$  będzie przestrzenią funkcji  $A \rightarrow \mathbb{R}$  (zob. zadanie 4, str. 1). Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni  $\mathbb{R}^A$  są podprzestrzeniami liniowymi:
- zbiór wszystkich funkcji parzystych, gdy  $A = \mathbb{R}$ .
  - zbiór wszystkich funkcji nieparzystych, gdy  $A = \mathbb{R}$ .
  - zbiór wszystkich funkcji rosnących.
  - zbiór wszystkich funkcji monotonicznych.
  - $U = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$ , gdy  $A = [0, 1]$ .
  - $U = \{f \in V : f(x) = 0 \text{ dla każdego } x \in B\}$ , gdy  $B \subset A$  i  $B \neq A$ .
- (18) Sprawdzić, które z określonych podzbiorów przestrzeni wielomianów  $K[X]$  nad ciałem  $K$  są podprzestrzeniami wektorowymi:
- $U = \{F \in K[X] : F(-1) = 0\}$ ,
  - $U = \{F \in K[X] : F(0) \cdot F(1) = 0\}$ ,
  - $K[X]_{10} = \{F \in K[X] : \text{st}F \leq 10\}$ ,
  - $U = \{F \in K[X] : \text{st}F = 10\}$ .
- (19) Pokazać, że jeśli  $U_1 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ,  $U_2 = \text{lin}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ , to

$$U_1 + U_2 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l).$$

- (20) Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni  
 a)  $\mathbb{Z}_2^2$ ; b)  $\mathbb{Z}_3^2$ ; c)  $\mathbb{Z}_2^3$ .
- (21) Pokazać, że jeśli  $U$  oraz  $W$  są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej  $V$ , to  $U \cup W$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $U \subset W$  lub  $W \subset U$ .
- (22) Wykazać, że:
- Suma  $U_1 + \dots + U_k$  podprzestrzeni przestrzeni liniowej  $V$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$ .
  - $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k \Leftrightarrow$  każdy wektor  $v \in V$  ma jednoznaczne przedstawienie w postaci  $v = u_1 + \dots + u_k$ , gdzie  $u_i \in U_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ .
- (23) Pokazać, że  $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$ , jeżeli

$$\text{a) } U_1 \text{ jest zbiorem rozwiązań równania } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \text{ a } U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

b)  $U_1$  jest zbiorem rozwiązań układu równań  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ , natomiast  $U_2 =$

$$\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

(24) Pokazać, że  $\mathbb{R}^4 = U_1 + U_2$ , lecz  $\mathbb{R}^4 \neq U_1 \oplus U_2$ , jeżeli  $U_1$  jest zbiorem rozwiązań równania  $3x_1 -$

$$2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \text{ zaś } U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right). \text{ Do równania definiującego } U_1 \text{ dołożyć jeszcze}$$

jedno równanie tak, aby nowa podprzestrzeń rozwiązań  $U'_1$  spełniała warunek  $\mathbb{R}^4 = U'_1 \oplus U_2$ .

(25) Uzasadnić, że

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

W przypadku każdej sumy prostej przedstawić wektor  $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  w postaci sumy wektora z pierwszego składnika sumy prostej i wektora z drugiego składnika sumy prostej.

(26) Niech  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (zob. zadanie 4 z poprzedniego zestawu ??, str. 1). Zbiór funkcji nieparzystych oznaczmy literą  $\mathbf{N}$ , natomiast zbiór funkcji parzystych - literą  $\mathbf{P}$ . Pokazać, że  $\mathbf{N}$  oraz  $\mathbf{P}$  są podprzestrzeniami przestrzeni  $V$  oraz że  $V = \mathbf{N} \oplus \mathbf{P}$ . Przedstawić funkcję  $f$  daną wzorem

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

w postaci sumy funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

(27) Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową oraz niech  $B \subset A$ . Oznaczmy  $U_B = \{f \in V^A : f(a) = \theta \text{ dla } a \in B\}$ . Pokazać, że  $U_B$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V^A$ . Dla jakich podzbiorów  $B$  oraz  $C$  zbioru  $A$  zachodzi równość  $V^A = U_B + U_C$ , a dla jakich równość  $V^A = U_B \oplus U_C$ ?

(28) Sprawdzić, czy  $K_n^n = \mathbf{S}_n \oplus \mathbf{A}_n$  (por. zadanie 8 str. 2).

(29) W zbiorze  $\mathbb{Z}_6$  wyróżnimy dwa podzbiory:  $U = \{0, 2, 4\}$  oraz  $W = \{0, 3\}$ . Pokazać, że  $U$  jest przestrzenią liniową nad  $\mathbb{Z}_3$  i  $W$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_6 = U + W$ ,  $U \cap W = \{0\}$ . Czy  $\mathbb{Z}_6$  jest sumą prostą przestrzeni liniowych  $U$  i  $W$ ?

(30) Sprawdzić, że podzbiór  $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{Z}_3^3$  jest podprzestrzenią liniową, a podzbiór

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{Q}^3 \text{ nie jest podprzestrzenią.}$$

(31) (*Modularność kraty podprzestrzeni*) Niech  $U_1, U_2, U_3$  będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej  $V$ . Udowodnić, że

- a)  $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ ,  
 b)  $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subset U_1 \cap (U_2 + U_3)$ ,  
 c)  $(U_1 \cap U_2) + (U_2 \cap U_3) + (U_3 \cap U_1) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_2 + U_3) \cap (U_3 + U_1)$ ,  
 d)  $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_1 \cap (U_2 + (U_1 \cap U_3))$ ,  
 e) jeśli  $U_1 \subset U_3$ , to  $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$ .
- (32) (*Niedystrybutywność kraty podprzestrzeni*) Podaj przykład podprzestrzeni  $U_1, U_2, U_3$  przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  dla których
- a)  $U_1 + (U_2 \cap U_3) \neq (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ ,  
 b)  $(U_1 + U_2) \cap U_3 \neq (U_1 \cap U_3) + (U_1 \cap U_3)$ .

- (33) (G. Birkhoff<sup>2</sup>) Sprawdzić, że z podprzestrzeni  $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$  za pomocą operacji  $+$  i  $\cap$  można utworzyć nieskończenie wiele różnych podprzestrzeni przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . (*Wskazówka: wygodnie jest rysować na płaszczyźnie  $z = 1$  przekroje badanych podprzestrzeni z tą płaszczyzną; nie wszystkie podprzestrzenie mają z nią niepusty przekrój!*)

- (34) Wykazać, że następujące pary przestrzeni wektorowych są izomorficzne:

- a)  $U_1 \oplus U_2$  i  $U_1 \times U_2$ ,  
 b)  $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$  i  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$ ,  
 c)  $(U_1 + U_2) / (U_1 \cap U_2)$  i  $U_1 / (U_1 \cap U_2) \times U_2 / (U_1 \cap U_2)$ ,

gdzie  $U_1, U_2, \dots, U_k$  są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej  $V$ .

- (35) Pokazać, że

- a)  $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Leftrightarrow \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  
 b) dla dowolnych  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$  oraz  $x \in K$ , zachodzi równość  $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + x\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ ,  
 c) dla dowolnego  $i = 1, \dots, n$ , oraz  $x \in K$ ,  $x \neq 0$ , zachodzi równość  $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ .

- (36) Sprawdzić, czy wektory  $\alpha$  oraz  $\beta$  są kombinacjami liniowymi układu  $\mathcal{A}$  wektorów przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ , jeżeli

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathcal{A} &= \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \text{b) } \mathcal{A} &= \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Czy zapis wektora  $\alpha$  w postaci kombinacji liniowej układu  $\mathcal{A}$  jest jednoznaczny?

- (37) Dla jakiej liczby zespolonej  $c \in \mathbb{C}$  wektor  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$  jest kombinacją liniową wektorów  $\begin{bmatrix} c \\ -1+i \\ 1+i \end{bmatrix}$  oraz  $\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -c \end{bmatrix}$  przestrzeni  $\mathbb{C}^3$ ?

<sup>2</sup>Garret Birkhoff (ur. 1911 r.) - współczesny matematyk amerykański, nie mylić z George D. Birkhoffem (1884 - 1944), amerykańskim specjalistą od równań różniczkowych.

- (38) Sprawdzić, czy układ  $\left( \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ i \end{bmatrix} \right)$  wektorów przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  jest liniowo niezależny<sup>3</sup>.

Przedstawić wektor  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1+2i \end{bmatrix}$  jako ich kombinację liniową.

- (39) Sprawdzić, że każda kombinacja liniowa  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$  wektorów  $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  z przestrzeni  $\mathbb{C}^4$  spełnia warunek  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ , a nie każda spełnia warunek  $|x_4| \leq 2$ .

- (40) Znaleźć taki wektor  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  przestrzeni  $\mathbb{Z}_2^3$ , aby wektory  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  były liniowo niezależne. Ile rozwiązań ma to zadanie?

- (41) Zbiór  $\mathbb{C}$  liczb zespolonych z działaniami dodawania liczb zespolonych i mnożenia liczb zespolonych przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią wektorów nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Oznaczamy ją symbolem  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ . Sprawdzić, że każde trzy wektory z  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  są liniowo zależne.

- (42) Sprawdzić, czy układ wektorów  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  przestrzeni  $K^4$  jest liniowo zależny, jeżeli

a)  $K = \mathbb{Z}_7, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

b)  $K = \mathbb{R}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$

c)  $K = \mathbb{C}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4+i \\ 0 \\ 5+3i \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2i \\ i \\ 2 \end{bmatrix}.$

d)  $K = \mathbb{Z}_5, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Jeżeli to możliwe, przedstawić jeden z wektorów tego układu jako kombinację liniową pozostałych.

- (43) Wykazać, że wektory  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych skalarów  $a_1, a_2, \dots, a_n$  i  $b_1, b_2, \dots, b_n$  z równości  $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$  wynika, że  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ . Wyjaśnić, jaki związek ma ten fakt z pytaniem, zadany w zadaniu 36.
- (44) Pokazać, że niezerowe wektory  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  są liniowo niezależne wtedy i tylko, gdy  $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \text{lin}(\alpha_1) \oplus \dots \oplus \text{lin}(\alpha_k)$ .

<sup>3</sup>Pojęcie liniowej niezależności wektorów pochodzi od Grassmanna.

- (45) Zbiór  $\mathbb{R}$  liczb rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia przez liczby wymierne jest przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{Q}$  liczb wymiernych. Oznaczamy ją symbolem  $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ . Sprawdzić, że  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni  $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ .
- (46) Niech  $K$  będzie ciałem, a  $B \subset A$  zbiorami. Dla funkcji  $f \in K^A$  oznaczmy  $f|_B$  element  $K^B$  taki, że dla każdego  $x \in B$  zachodzi równość:  $(f|_B)(x) = f(x)$ . Funkcję  $f|_B$  nazywamy ograniczeniem funkcji  $f$  do podzbioru  $B$ . Jaką prawdziwą implikację można utworzyć ze zdań: " $f_1, f_2, \dots, f_n$  są liniowo zależne w  $K^A$ ", " $f_1|_B, f_2|_B, \dots, f_n|_B$  są liniowo zależne w  $K^B$ "? Jaką prawdziwą implikację można utworzyć ze zdań: " $f_1, f_2, \dots, f_n$  są liniowo niezależne w  $K^A$ ", " $f_1|_B, f_2|_B, \dots, f_n|_B$  są liniowo niezależne w  $K^B$ "?
- (47) Sprawdzić, czy  $f_1, f_2, f_3$  są liniowo niezależne w  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , jeżeli
- $f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin x, f_3(x) = \sin 2x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,
  - $f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin^2 x, f_3(x) = \cos 2x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .
- (48) Sprawdzić, czy  $1, X, X^2, \dots, X^n$  są liniowo niezależne w przestrzeni wektorowej  $K[X]$ . Sprawdzić, czy dla danego  $a \in K$ , wielomiany  $1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n$  są liniowo niezależne w tej samej przestrzeni.
- (49) Sprawdzić, czy  $f_1, f_2, \dots, f_n$  są liniowo niezależne w  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , jeżeli  $f_i(x) = |x - 1| \cdot |x - 2| \cdot \dots \cdot |x - i|$  dla  $x \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .
- (50) Sprawdzić, czy  $\frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x-2}, \dots, \frac{1}{x-n}$  są liniowo niezależne w przestrzeni  $\mathbb{Q}(X)$  nad ciałem liczb wymiernych.
- (51) Niech  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  będzie układem niezerowych wektorów przestrzeni  $V$ . Pokazać, że układ  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  jest bazą przestrzeni  $V$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $V = \text{lin}(\beta_1) \oplus \text{lin}(\beta_2) \oplus \dots \oplus \text{lin}(\beta_n)$ .
- (52) Pokazać, że wektory  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tworzą bazę przestrzeni  $\mathbb{Q}^n$  i znaleźć współrzędne wektora  $\beta$  w tej bazie, jeżeli

$$\begin{aligned} \text{a) } n = 3; \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}. \\ \text{b) } n = 3; \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}. \\ \text{c) } n = 4; \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (53) Wyznaczyć bazy podprzestrzeni rozwiązań następujących układów równań (nad  $\mathbb{R}$ ):

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

- (54) Wyznaczyć bazę i wymiar<sup>4</sup> podprzestrzeni  $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^4$  gdy:

$$\text{a) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

<sup>4</sup>Pojęcie wymiaru przestrzeni wektorowej pochodzi od Grassmanna.

$$\begin{aligned} \text{b) } \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{c) } \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(55) Wybrać bazę podprzestrzeni  $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \subset \mathbb{Z}_7^m$  spośród wektorów  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , jeżeli

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{b) } \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{c) } \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{d) } \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wybrać dowolne bazy powyższych podprzestrzeni, niekoniecznie spośród wektorów  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

(56) Czy można znaleźć bazę przestrzeni  $K^4$  złożoną z wektorów postaci:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Pokazać, że jeśli  $U$  jest właściwą podprzestrzenią przestrzeni liniowej  $V$ , to istnieje baza przestrzeni  $V$ , której wszystkie wektory należą do  $V \setminus U$ .

(57) Pokazać, że jeśli wektory  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tworzą bazę przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $K$ , to dla dowolnych  $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ , wektory:

a)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + x\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$  dla  $x \in K$ ,

b)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$  dla  $x \in K, x \neq 0$

również tworzą bazę przestrzeni  $V$ .

(58) Znaleźć bazę przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , w której wektor  $\varepsilon_1$  ma współrzędne  $(1, 2, 1)$  oraz bazę, w której wektor ten ma współrzędne  $(1, 1, 1)$ , a wektor  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$  współrzędne  $(1, 0, 0)$ .

(59) Znaleźć bazę każdej z niżej wypisanych podprzestrzeni przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  oraz bazę sumy algebraicznej  $U_i + U_j$ , jak i części wspólnej  $U_i \cap U_j$  każdej pary podprzestrzeni:

$$\text{a) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right), U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$\text{b) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right), U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right),$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$\text{c) } U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\},$$

$$U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right).$$

$$\text{d) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right), U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

- (60) Niech ciało  $K$  ma  $q$  elementów. Obliczyć, ile przestrzeni  $K^n$  ma różnych  
 a) wektorów, b) baz.