Zestaw zadań 3: Układy równań liniowych.

(1) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych następujące układy równań:

(a) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} 8x+6y+5z+2t=21 \\ 3x+3y+2z+t=10 \\ 4x+2y+3z+t=8 \\ 3x+5y+z+t=15 \\ 7x+4y+5z+2t=18 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} x+y+3z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+4z-t+3w=2 \\ 3x+3y+5z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+8z-3t+9w=2 \end{cases}$; (h) $\begin{cases} 2x-y+z+2t+3w=2 \\ 6x-3y+2z+4t+5w=3 \\ 6x-3y+2z+8t+13w=9 \\ 4x-2y+z+t+2w=1 \end{cases}$;

(i) $\begin{cases} 6x+4y+5z+2t+3w=1 \\ 3x+2y+4z+t+2w=3 \\ 3x+2y-2z+t \qquad =-7 \\ 9x+6y+z+3t+2w=2 \end{cases}$.

(2) Następujące układy rozwiązać nad $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$:

(a) $\begin{cases} 2x+7y+3z+t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4 \\ 9x+4y+z+7t=2 \end{cases}$, $p=11$; (b) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 9x-3y+5z+6t=4 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}$, $p=13$;

(c) $\begin{cases} 6x+3y+2z+3t+4w=5 \\ 4x+2y+z+2t+w=4 \\ 4x+2y+3z+2t+w=0 \\ 2x+y+7z+3t+2w=1 \end{cases}$, $p=11$ (d) $\begin{cases} 2x-y+3z-7t=5 \\ 6x-3y+z-4t=7 \\ 4x-2y+14z-31t=18 \end{cases}$, $p=37$

(e) $\begin{cases} x+2y+3z-2t+w=4 \\ 3x+6y+5z-4t+3w=5 \\ x+2y+7z-4t+w=11 \\ 2x+4y+2z-3t+3w=6 \end{cases}$, $p=13$ (f) $\begin{cases} 3x+2y+2z+2t=2 \\ 2x+3y+2z+5t=3 \\ 9x+y+4z-5t=1 \\ 2x+2y+3z+4t=5 \\ 7x+y+6z-t=7 \end{cases}$, $p=7$

(g) $\begin{cases} 2x+3y+z+2t=4 \\ 4x+3y+z+t=5 \\ 5x+11y+3z+2t=2 \\ 2x+5y+z+t=1 \\ x-7y-z+2t=7 \end{cases}$, $p=17$

(3) Każdy z następujących układów rozwiązać w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$:

(a) $\begin{cases} x+4y+3z=2 \\ 3x+2y+4z=3 \\ 4x+y+z=0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+4y+3z=3 \\ 4x \qquad +3z=2 \end{cases}$.

(4) Pokazać, że układ równań $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$ jest sprzeczny w ciele $\mathbb{Z}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p=2$.

(5) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych układ równań

$$\begin{cases} 6ix+(-3+6i)y+(4+2i)z+(1+2i)t=0 \\ (5+5i)x+(3+5i)y+(7-3i)z+(4+2i)=0 \\ (-3+3i)x+(-6+3i)y+(-1+3i)z \qquad -t=0 \\ (1+11i)x+(1+12i)y+(11+7i)z+7it=0 \end{cases}$$

przy założeniu:
(a) $x=0$, (b) $y=0$, (c) $z=0$, (d) $t=0$, (e) $x+y=0$.

(6) Znaleźć takie liczby rzeczywiste a, b, c, d by zachodziła równość wielomianów zmiennej X o wspóczynnikach rzeczywistych:

$$a\cdot 1+b(X-2)+c(X-2)^2+d(X-2)^3=1+X^3.$$

(7) Wyznaczyć takie liczby zespolone a, b, c, d by zachodziła równość funkcji wymiernych zmiennej X o współczynnikach zespolonych:

$$\frac{4}{X^4+4}=\frac{a}{X+1+i}+\frac{b}{X+1-i}+\frac{c}{X-1+i}+\frac{d}{X-1-i}.$$

(8) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ następujce układy równań:
(a) $\begin{cases} (1+i)x+2iy-z=3+2i \\ (3+i)x+(1-i)y+4z=6+i \\ 5x+y-iz=2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} (1+i)x+2y-iz=2-3i \\ 3x+iy+(2-i)z=6+4i \\ (4+i)x+y+3z=6+6i \end{cases}$.

(9) Dla jakiego parametru $\lambda\in\mathbb{Z}_7$ układ równań $\begin{cases} x+2y+6z+6t=1 \\ x+y+z+3t=2 \\ 3x+5y+6z+t=\lambda \end{cases}$ nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma rozwiązanie? Rozwiązać ten układ, gdy jest to możliwe.

(10) W zależności od parametru $\lambda\in\mathbb{Q}$ rozwiązać układy równań:
(a) $\begin{cases} 8x+6y+3z+2t=5 \\ -12x-3y-3z+3t=-6 \\ 4x+5y+z+4t=3 \\ \lambda x+4y+z+4t=2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x-y+3z+4t=5 \\ 4x-2y+5z+6t=7 \\ 6x-3y+7z+8t=9 \\ \lambda x-4y+9z+10t=11 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} \lambda x+y+z+t=1 \\ x+\lambda y+z+t=1 \\ x+y+\lambda z+t=1 \\ x+y+z+\lambda t=1 \end{cases}$.

(11) Do układu równań należą wszystkie równania $x+ny+nz=1$ dla $n\in\mathbb{N}$. Znaleźć równoważny mu układ o najmniejszej ilości równań i rozwiązać go.

(12) Z Księgi I "*Arytmetyki*" Diofantosa z Aleksandrii[1] (ok. 250 r.):
(a) "Zadanie 16. Znaleźć trzy takie liczby, aby dodane parami dawały dane liczby. Potrzeba, by połowa sumy danych liczb była większa odkażdej z nich."
(Dla danych a,b,c rozwiązać układ równań $\begin{cases} \quad\; y+z=a \\ x \qquad +z=b \\ x+y \qquad =c \end{cases}$).

[1]Diofantos (zapewne III w.) - matematyk grecki z Aleksandrii. Brak danych o jego życiu. Zachowało się 6 z 13 ksiąg "*Arytmetyki*" i fragmenty książki o liczbach wieloktnych. W "*Arytmetyce*" Diofantos podał prawa działań na liczbach względnych i wprowadził niewiadomą - symbol literowy uczestniczcy w działaniach na równi z liczbami i w zgodzie z prawami działań.

(b) "Zadanie 17. Znaleźć cztery takie liczby, żeby dodane po trzy dawały dane liczby."

(Dla danych a, b, c, d rozwiązać układ równań $\begin{cases} \phantom{x+{}} y + z + t = a \\ x \phantom{{}+y} + z + t = b \\ x + y \phantom{{}+z} + t = c \\ x + y + z \phantom{{}+t} = d \end{cases}$).

(c) "Zadanie 18. Znaleźć trzy takie liczby, aby dodane parami przewyższay pozostałą o daną liczbę."

(Dla danych a, b, c rozwiązać układ równań $\begin{cases} \phantom{x+{}} y + z = a + x \\ x \phantom{{}+y} + z = b + y \\ x + y \phantom{{}+z} = c + z \end{cases}$).

(d) "Zadanie 19. Znaleźć cztery takie liczby, żeby dodane po trzy przewyższały pozostałą o daną liczbę."

(Dla danych a, b, c, d rozwiązać układ równań $\begin{cases} \phantom{x+{}} y + z + t = a + x \\ x \phantom{{}+y} + z + t = b + y \\ x + y \phantom{{}+z} + t = c + z \\ x + y + z \phantom{{}+t} = d + t \end{cases}$).

(e) "Zadanie 20. Daną liczbę rozłożyć na trzy liczby tak, by każda ze skrajnych, dodana do środkowej miała dany stosunek do pozostałej."

(Dla danych a, k, m rozwiązać układ równań $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y = kz \\ y + z = mx \end{cases}$).

(f) "Zadanie 22. Znaleźć trzy takie liczby, które staną się równe, gdy każda odda następnej daną swoją część."
(Dla danych niezerowych a, b, c rozwiązać układ równań $\left(1 - \frac{1}{a}\right) x + \frac{1}{c} z = \left(1 - \frac{1}{b}\right) y + \frac{1}{a} x = \left(1 - \frac{1}{c}\right) z + \frac{1}{b} y$).

(13) Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości niewiadomych x, y, z, t dla których:

(a) $\begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = x \\ -6y - 20z - 45t = y \\ 4y + 15z + 36t = z \\ -y - 4z - 10t = t \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = -x \\ -6y - 20z - 45t = -y \\ 4y + 15z + 36t = -z \\ -y - 4z - 10t = -t \end{cases}$.

(14) Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 20x - 10y + 4z - t = a \\ 70x - 36y + 15z - 4t = b \\ 84x - 45y + 20z - 6t = c \\ 35x - 20y + 10z - 4t = d \end{cases}$ w zależności od parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.