

Zestaw zadań 2: Liczby zespolone.¹

- (1) Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniające równość:
 (a) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$, (b) $(2 + 3i)x + (4 - 5i)y = 6 - 2i$,
 (c) $(4 - 3i)2x + (1 + i)2y = 7 - 12i$, (d) $\frac{2+i}{3-i}x + \left(\frac{4-i}{3-i}\right)^2 y = 1 + i$.
- (2) Rozwiązać układ równań:
 (a) $\begin{cases} (1+i)z + (2-i)w = 2 - 21 \\ (1-i)z - (3+i)w = -3 + 3i \end{cases}$; (b) $\begin{cases} (3-i)z + (4+2i)w = 2 + 6i \\ (4+2i)z - (2+3i)w = 5 + 4i \end{cases}$;
 (c) $\begin{cases} \frac{z}{2-i} + \frac{w}{1+i} = 2 \\ \frac{5z}{(2-i)^2} + \frac{2w}{(1+i)^2} = 3 \end{cases}$.
- (3) Dla dowolnej liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$ obliczyć:
 (a) i^n , (b) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, (c) $(1+i)^n$.
- (4) Obliczyć:
 (a) $(1+2i)^6$, (b) $(2+i)^7 + (2-i)^7$, (c) $(1+2i)^5 + (1-2i)^5$.
- (5) Wykazać równość $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ i podać jej interpretację geometryczną².
- (6) Rozwiązać równania:
 (a) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$, (b) $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$.
- (7) Jakie twory na płaszczyźnie zespolonej określają równania i nierówności:
 (a) $|z| < 2$, (b) $|z - 1| = 3$, (c) $|z - 1 - 2i| \leq 3$,
 (d) $1 < |z| < 5$, (e) $\frac{|z-3|}{|z+1|} \geq 1$, (f) $|z - c| + |z + c| = 2a$,
 (g) $\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \pi$, (h) $|z - i| = |z + i|$, (i) $\arg \frac{z-i}{z+i} = \frac{\pi}{2}$,
 (j) $\arg(z - z_0) = \phi$, ϕ dane, (k) $0 \leq \text{Re}(iz) \leq 1$, (l) $\text{Re}(z^2) > 1$.
- (8) Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:
 $1, -1, i, -i,$
 $1 + i, 1 - i, -1 + i, 1 + i\sqrt{3},$
 $-1 - i\sqrt{3}, \sqrt{3} - i, \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6},$
 $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3}.$
- (9) Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:
 $\cos \alpha - i \sin \alpha, \sin \alpha + i \cos \alpha, \sin \alpha - i \cos \alpha, 1 + i \tan \alpha.$
- (10) Rozwiązać równanie $z^5 = 1$.
 (a) Korzystając z wzoru Moivre'a³ narysować rozwiązania na płaszczyźnie Gaussa⁴

¹Liczby zespolone, koniecznie potrzebne do znajdowania rzeczywistych pierwiastków wielomianów stopnia 3, pojawiły się po raz pierwszy w 1545 r. w "Ars magna" Girolamo Cardano (1501 - 1576). Symbol i dla $\sqrt{-1}$ wprowadził Leonhard Euler w 1777 r.

²Interpretację geometryczną liczb zespolonych odkrył C. Wessel w 1799 r., a potem niezależnie J. R. Argand w 1806 r.

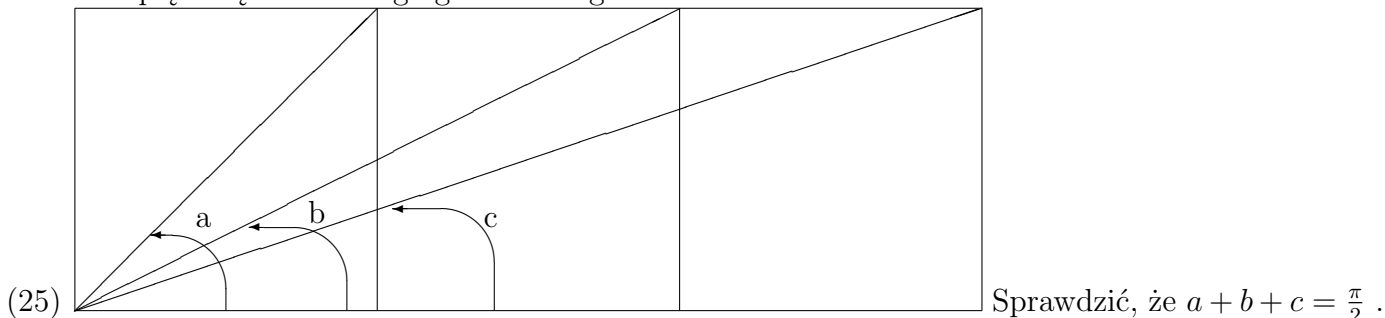
³de Moivre Abraham (20V1667-27XI1754), matematyk angielski, członek Royal Society i francuskiej Akademii Nauk, odkrył w 1707 r. wzór na potęgę liczby zespolonej, zajmował się również szeregami potęgowymi, odkrył wzór asymptotyczny na $n!$ i twierdzenie graniczne de Moivre'a - Laplace'a w rachunku prawdopodobieństwa.

⁴Gauss, Carl Friedrich (30IV1777 - 23II1855), niemiecki matematyk, astronom, fizyk i kartograf. Znaczne osiągnięcia w każdej właściwie uprawianej w jego czasach dziedzinie matematyki podsumowało nadane mu miano księcia matematyków (*princeps mathematicorum*). Odkrył między innymi interpretację geometryczną liczb zespolonych, ale chcąc uszanować

- (b) Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczbę $\sqrt{5} + 1 + i(\sqrt{10} - 2\sqrt{5})$.
- (11) Obliczyć:
- (a) $\frac{(1 + i\sqrt{3})^{76} + 1}{(1 - i)^{37}}$, (b) $\frac{(1 - i\sqrt{3})^{32} + 5}{(1 + i)^{17}}$.
- (12) Wyznaczyć:
- $\sqrt{2i}$, $\sqrt{-8i}$, $\sqrt{3 - 4i}$, $\sqrt{-15 + 8i}$, $\sqrt{-3 - 4i}$,
 $\sqrt{-11 + 60i}$, $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt{-8 + 6i}$.
- (13) Rozwiązać równania:
- (a) $z^2 + 3z + 3 + i = 0$, (b) $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$,
(c) $z^2 + z(1 + i) + 2i = 0$, (d) $(4 - 3i)z^2 - (2 + 11i)z - (5 + i) = 0$.
- (14) Rozwiązać równania:
- (a) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$, (b) $z^4 + (15 + 7i)z^2 + 8 = 0$, (c) $z^4 - (18 + 4i)z^2 + 77 - 36i = 0$.
- (15) Rozwiązać równania: (a) $z^6 = \frac{(1 + i)^3}{\sqrt{3} + i}$, (b) $(z + i)^n - (z - i)^n = 0$.
- (16) Wyznaczyć i narysować obraz brzegu kwadratu o wierzchołkach $-1 - i$, $2 - i$, $2 + 2i$ oraz $-1 + 2i$ przy odwzorowaniu $z \mapsto z^2$.
- (17) Ułożyć tablicę dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych co 15° .
- (18) Ułożyć tablicę dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych co 3° .
- (19) Rozwiązać w ciebie liczb zespolonych równania:
- (a) $z^2 + i|z| = 0$, (b) $z^2 + 2|z| = 0$.
- (20) Obliczyć:
- (a) $(1 + 2i)^6$, (b) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$, (c) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^7$.
- (21) Rozwiązać równania:
- (a) $(1 + i)z^2 - (3 + 7i)z + 10i = 0$;
(b) $(1 + 2i)z^2 - (-1 + 8i)z + (-5 + 5i) = 0$;
(c) $(1 + 2i)z^2 - (1 + 7i)z + (-2 + 6i) = 0$;
(d) $(1 + i)z^2 - (1 + 5i)z + (-2 + 6i) = 0$;
(e) $(1 - i)z^2 - (7 + 3i)z + 10i = 0$;
(f) $(1 - 2i)z^2 - (4 + 7i)z + (7 + i) = 0$;
(g) $(1 + i)z^2 - (3 + 3i)z + (4 + 2i) = 0$;
- (22) Obliczyć (podając **dokładne** wartości części rzeczywistej i urojonej):
- (a) $\frac{(1 - i)^{24}}{(\sqrt{3} - i)^{22}}$; (b) $\frac{(1 - i\sqrt{3})^{42}}{(-1 + i)^{31}}$; (c) $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{36}}{(1 + i)^{31}}$; (d) $\frac{(1 - i)^{28}}{(\sqrt{3} + i)^{20}}$;
(e) $\frac{(1 - i)^{28}}{(\sqrt{3} + i)^{20}}$; (f) $\frac{(-1 + i)^{32}}{(-\sqrt{3} + i)^{28}}$; (g) $\frac{(-1 - i)^{28}}{(1 - i\sqrt{3})^{20}}$.
- (23) (a) Sprawdzić, że liczba $\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{12}$ jest rzeczywista (*Wskazówka:* $\frac{\sqrt{3} - i}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{2} = 1$).
- (b) Obliczyć $\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$.
- (24) (a) Narysować na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki z 1 stopni 3, 4, 5, 6, 7 i 8.

pierwszeństwo Arganda nastawał na używanie nazwy "wykres Arganda". Mimo to płaszczyznę, na której punkt (a, b) utożsamiono z liczbą zespoloną $a + bi$ nazywamy płaszczyzną Gaussa.

- (b) Narysować figury, powstające przez połączenie odcinkami ε^k z ε^{k+1} dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, dla wszystkich pierwiastków ε z 1 stopnia n , jeżeli $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (Przy $n = 4$ rysujemy cztery rysunki dla czterech możliwych ε , przy $n = 5$ - pięć rysunków, itd. Dla każdej wartości n jeden rysunek jest nieciekawym - dlaczego?).
- (c) Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kątów między bokami pięciokąta foremnego i pięciokąta foremnego gwiaździstego.



- (26) (a) Wykazać, że dla liczb zespolonych $z \neq 1$ zachodzi równość $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.
- (b) Udowodnić równości:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

- (27) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją wielomiany $V_n(X)$ i $W_n(X)$ takie, że zachodzą tożsamości: $\cos nx = V_n(\cos x)$ i $\sin nx = \sin x \cdot W_n(\cos x)$.
- (28) Jaki punkt koła opisanego na kwadracie ma największy iloczyn odległości od wszystkich wierzchołków kwadratu? (*Wskazówka: wygodny do obliczeń jest kwadrat, wyznaczony przez pierwiastki stopnia 4 z 1*).
- (29) Wykonać działania: (a) $\frac{1 + itg\alpha}{1 - itg\alpha}$, (b) $\frac{a + bi}{a - bi}$ (c) $\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^2 - (2 + i)^2}$, (d) $\frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$.
- (30) Dla danej liczby zespolonej z podać wzór na wszystkie takie liczby zespolone w , że
(a) $z \cdot w$ jest liczbą rzeczywistą; (b) $z \cdot w$ jest liczbą czysto urojoną.
- (31) Udowodnić równoważność: $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists_{w \in \mathbb{C}} [z = \frac{\bar{w}}{w}]$.
- (32) Wykazać nierówności:
(a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, (b) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
- (33) Pierwiastek stopnia n z 1 nazywamy *pierwotnym*, jeśli nie jest on pierwiastkiem z 1 stopnia niższego, niż n . Wykazać, że
(a) liczba $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(k, n) = 1$;
(b) ε jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy każdy pierwiastek z 1 stopnia n jest postaci ε^k dla penej liczby całkowitej k .
- (34) Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 6x + 13$ wiedząc, że jednym z nich jest $3 + 2i$.