

3. WYKŁAD 3

3.1. Układy równań liniowych.

Definicja 3.1. Niech F będzie ciałem. **Układem m równań liniowych** o niewiadomych $x_1, \dots, x_n$, $m, n \in \mathbb{N}$, o współczynnikach z ciała F nazywamy układ równań postaci:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_j \in F$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Definicja 3.2. Niech F będzie ciałem. Wielomian $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ nazywamy **formą stopnia m** , gdy jest sumą jednomianów stopnia m lub wielomianem zerowym. Zbiór form stopnia m z pierścienia $F[x_1, \dots, x_n]$ będziemy oznaczali przez $F_h[x_1, \dots, x_n]_m$. Formy stopnia 1 będziemy nazywali **formami liniowymi**. Formy stopnia 2 będziemy nazywaliśmy **formami kwadratowymi**.

Uwaga 3.3. Niech F będzie ciałem, niech $\mathcal{U}$ będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z F . Lewe strony równań należących do $\mathcal{U}$ są formami liniowymi ze zbioru $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, a prawe elementami ciała F .

Definicja 3.4. Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} l_1 = b_1 \\ l_2 = b_2 \\ \vdots \\ l_m = b_m \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych, $l_1, \dots, l_m \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, $b_1, \dots, b_m \in F$. Każde równanie liniowe:

$$a_1l_1 + a_2l_2 + \dots + a_ml_m = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_mb_m,$$

gdzie $a_1, \dots, a_m \in F$, nazywamy **kombinacją liniową** równań danego układu. **Rozwiązaniem** układu $\mathcal{U}$ nazywamy każdy taki ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ elementów ciała F , że

$$l_i(a_1, \dots, a_n) = b_i,$$

dla $i \in \{1, \dots, m\}$.

Uwaga 3.5. Każde rozwiązanie układu równań liniowych jest rozwiązaniem każdego równania będącego kombinacją liniową równań tego układu.

Definicja 3.6. Dwa układy równań $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ nazywamy **równoważnymi** gdy każde równanie układu $\mathcal{U}_1$ jest kombinacją liniową równań układu $\mathcal{U}_2$ i vice versa.

Uwaga 3.7. Równoważne układy równań mają identyczne zbiory rozwiązań.

Definicja 3.8. Układ równań nazywamy **sprzecznym** gdy równanie $0 = 1$ jest kombinacją liniową równań tego układu.

Wniosek 3.9. Spreczny układ równań nie ma rozwiązań.

Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Podamy metodę rozwiązania tego układu przez **eliminację Gaussa**.

Etap I: sprowadzenie do postaci trójkątnej.

Wybieramy równanie i niewiadomą o niezerowym współczynniku i nazywamy ją **niewiadomą bazową** 1 kroku. Załóżmy, że jest nią x_1 ze współczynnikiem $a_{11} \neq 0$. Mnożymy wybrane równanie (u nas równanie pierwsze) przez $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i odejmujemy od drugiego równania. Postępując indukcyjnie mnożymy wybrane równanie przez $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ i odejmujemy od i -tego równania, $i \in \{2, \dots, m\}$. Następnie przechodzimy do kroku 2, w którym wybieramy równanie spośród $i \in \{2, \dots, m\}$, niewiadomą bazową drugiego kroku i powtarzamy procedurę dla równań $i \in \{3, \dots, m\}$. Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \widetilde{a}_{22}x_2 + \widetilde{a}_{23}x_3 + \dots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \widetilde{a}_{rr}x_r + \dots + \widetilde{a}_{rn}x_n = \widetilde{b}_r. \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_r$ zostały wybrane jako niewiadome bazowe, a $x_{r+1}, \dots, x_n$ pozostają jako **parametry**.

Etap II: sprowadzenie do postaci diagonalnej.

W ostatnim równaniu (u nas r) wybieramy niewiadomą bazową, powiedzmy x_r , i eliminujemy z równań $i \in \{1, \dots, r-1\}$ odejmując równanie r od i po wcześniejszym pomnożeniu przez $\frac{\widetilde{a}_{ir}}{\widetilde{a}_{rr}}$. Następnie postępujemy indukcyjnie z równaniami $i \in \{1, \dots, r-2\}$. Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \widetilde{a}_{1,r+1}x_{r+1} + \widetilde{a}_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + \widetilde{a}_{1n}x_n = \widetilde{b}_1 \\ \quad \widetilde{a}_{22}x_2 + \widetilde{a}_{2,r+1}x_{r+1} + \widetilde{a}_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \widetilde{a}_{rr}x_r + \widetilde{a}_{r,r+1}x_{r+1} + \widetilde{a}_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + \widetilde{a}_{rn}x_n = \widetilde{b}_r. \end{cases}$$

Etap III: zapisujemy rozwiązanie przenosząc parametry na prawą stronę i dzieląc przez współczynniki przy $x_1, \dots, x_r$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\widetilde{b}_1}{a_{11}} - \frac{\widetilde{a}_{1,r+1}}{a_{11}}x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a}_{1n}}{a_{11}}x_n \\ x_2 = \frac{\widetilde{b}_2}{a_{22}} - \frac{\widetilde{a}_{2,r+1}}{a_{22}}x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a}_{2n}}{a_{22}}x_n \\ \quad \quad \quad \vdots \\ x_r = \frac{\widetilde{b}_r}{a_{rr}} - \frac{\widetilde{a}_{r,r+1}}{a_{rr}}x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a}_{rn}}{a_{rr}}x_n. \end{cases}$$

Przykład:

(1) Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{Q}$. Zaczynamy od sprowadzenia układu do postaci trójkątnej. Jako niewiadomą bazową pierwszego kroku wybieramy x_1 w pierwszym równaniu, a następnie przepisujemy to równanie bez zmian, zaś od drugiego równania odejmujemy pierwsze pomnożone przez 3, od trzeciego pierwsze pomnożone przez 1, a od czwartego pierwsze pomnożone przez 2:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 4 \\ 3x_1 & +6x_2 & +5x_3 & -4x_4 & +3x_5 & = 5 & | - 3 \cdot I \\ x_1 & +2x_2 & +7x_3 & -4x_4 & +x_5 & = 11 & | - I \\ 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & -3x_4 & +3x_5 & = 6 & | - 2 \cdot I \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 4 \\ & & & -4x_3 & +2x_4 & = -7 \\ & & & 4x_3 & -2x_4 & = 7 \\ & & & -8x_3 & +x_4 & +x_5 & = -2 \end{array} \right.$$

Jako niewiadomą bazową drugiego kroku wybieramy x_3 w drugim równaniu, a następnie przepisujemy pierwsze dwa równania bez zmian, zaś do trzeciego dodajemy drugie, a od czwartego odejmujemy drugie pomnożone przez 2:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 4 \\ & & & -4x_3 & +2x_4 & = -7 \\ & & & 4x_3 & -2x_4 & = 7 & | + II \\ & & & -8x_3 & +x_4 & +x_5 & = -2 & | - 2 \cdot II \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 4 \\ & & & -4x_3 & +2x_4 & = -7 \\ & & & & 0 & = 0 \\ & & & & -3x_4 & +x_5 & = 12 \end{array} \right.$$

Trzecie równanie jest równaniem tożsamościowym, możemy więc je pominąć w dalszych rozważaniach. Jako niewiadomą bazową trzeciego kroku wybieramy x_5 w ostatnim równaniu. Tym samym sprowadziliśmy układ równań do postaci trójkątnej, w której x_1, x_3, x_5 są niewiadomymi bazowymi, a x_2, x_4 parametrami:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +3x_3 & +x_5 & +2x_2 & -2x_4 & = 4 \\ & & -4x_3 & & +2x_4 & = -7 \\ & & & x_5 & & -3x_4 & = 12 \end{array} \right.$$

Następnie sprowadzamy układ do postaci diagonalnej. W pierwszym kroku rozważamy niewiadomą bazową x_5 w ostatnim równaniu i eliminujemy ją z pozostałych równań odejmując od pierwszego równania trzecie:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +3x_3 & +x_5 & +2x_2 & -2x_4 & = 4 & | - III \\ & & -4x_3 & & +2x_4 & = -7 \\ & & & x_5 & & -3x_4 & = 12 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +3x_3 & & +2x_2 & +x_4 & = -8 \\ & & -4x_3 & & +2x_4 & = -7 \\ & & & x_5 & & -3x_4 & = 12 \end{array} \right.$$

W drugim kroku rozważamy niewiadomą bazową x_3 w drugim równaniu i eliminujemy ją z pozostałych równań dodając do pierwszego równania drugie pomnożone przez $\frac{3}{4}$:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +3x_3 & & +2x_2 & +x_4 & = -8 & | + \frac{3}{4} \cdot II \\ & & -4x_3 & & +2x_4 & = -7 \\ & & & x_5 & & -3x_4 & = 12 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & & & +2x_2 & +\frac{5}{2}x_4 & = -\frac{53}{4} \\ & & -4x_3 & & +2x_4 & = -7 \\ & & & x_5 & & -3x_4 & = 12 \end{array} \right.$$

Tym samym sprowadziliśmy układ równań do postaci diagonalnej. Pozostaje zapisać rozwiązanie, przenosimy zatem wszystkie wyrażenia zawierające parametry na prawą stronę, pozostawiając na lewej stronie wyrażenia zawierające niewiadome bazowe, a następnie dzielimy występujące w

układzie równania przez współczynniki występujące przy niewiadomych bazowych, co sprowadza się do podzielenia drugiego równania przez -4 :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & & & \\ & -4x_3 & & \\ & & x_5 & \\ & & & \end{array} \right. \begin{array}{l} = -\frac{53}{4} \\ = -7 \\ = 12 \end{array} \begin{array}{l} -2x_2 \\ -\frac{5}{2}x_4 \\ -2x_4 \\ +3x_4 \end{array} \mid : (-4) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & & & \\ & x_3 & & \\ & & x_5 & \\ & & & \end{array} \right. \begin{array}{l} = -\frac{53}{4} \\ = \frac{7}{4} \\ = 12 \end{array} \begin{array}{l} -2x_2 \\ -\frac{5}{2}x_4 \\ +\frac{1}{2}x_4 \\ +3x_4 \end{array}$$

Dobrze jest uwzględnić w zapisie rozwiązania występujące w nim parametry tak, aby rozwiązanie układu równań o 5 niewiadomych było istotnie pięcioelementowym ciągiem $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$:

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1 & = & -\frac{53}{4} & -2x_2 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_2 & = & & x_2 \\ x_3 & = & \frac{7}{4} & + \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 & = & & x_4 \\ x_5 & = & 12 & + 3x_4 \end{array} \right.$$

Uwaga 3.10. Chcąc zaoszczędzić czas układy równań zapisujemy jako **macierze**, czyli prostokątne tabliczki liczb, które są odpowiednimi współczynnikami w odpowiednich równaniach.

Przykład:

(2) Rozważmy układ:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y + 2z + 5t = 0 \\ 2x + y + z + 4t = 0 \\ 3x + 5y + 3z + 2t = 0 \\ x + 4y + 4z + 2t = 0 \end{array} \right.$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_7$. Zapisujemy go w notacji macierzowej, a następnie rozwiązujemy wykonując odpowiednie operacje na wierszach macierzy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -2 \cdot w_1 \\ -3 \cdot w_1 \\ -w_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ -w_2 \\ +3 \cdot w_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] +3 \cdot w_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

Na tym etapie wygodnie jest wrócić do tradycyjnej notacji. Pozostaje zapisać rozwiązanie układu:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y + t = 0 \\ \quad \quad 4z + 6t = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 + 3y + 6t \\ \quad 4z = 0 + t \end{array} \right. \mid : 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 + 3y + 6t \\ \quad \quad z = 0 + 2t \end{array} \right.$$

czyli po uwzględnieniu parametrów:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = 3y + 6t \\ y & = y \\ z & = 2t \\ t & = t \end{array} \right.$$

(3) Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} (-2 - 4i)x + (-2 - 6i)y + (3 + 4i)z + (-2 - i)t = 0 \\ 2ix - 2iy + z - t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{C}$. Otrzymujemy kolejno:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2-4i & -2-6i & 3+4i & -2-i & 0 \\ 2i & -2i & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad -(3+4i) \cdot w_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 6-10i & -10 & 0 & 1+3i & 0 \\ 2i & -2i & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad -\frac{1}{5}i \cdot w_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6-10i & -10 & 0 & 1+3i & 0 \\ -2+\frac{4}{5}i & 0 & 1 & -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i & 0 \end{array} \right] : (-10) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -\frac{3}{5}+i & 1 & 0 & -\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i & 0 \\ -2+\frac{4}{5}i & 0 & 1 & -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i & 0 \end{array} \right]$$

a zatem

$$\begin{cases} (-\frac{3}{5}+i)x + y + (-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i)t = 0 \\ (-2+\frac{4}{5}i)x + z + (-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i)t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = (\frac{3}{5}-i)x + (\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i)t \\ z = (2-\frac{4}{5}i)x + (\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i)t \end{cases}$$

czyli po uwzględnieniu parametrów:

$$\begin{cases} x = x \\ y = (\frac{3}{5}-i)x + (\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i)t \\ z = (2-\frac{4}{5}i)x + (\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i)t \\ t = t. \end{cases}$$

3.2. Algebra macierzy.

Definicja 3.11. *Macierzą nad ciałem F nazywamy prostokątną tablicę elementów ciała F .*

Zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ oznaczamy $M_m^n(F)$.

Napis $A = [a_{ij}]$ oznacza, że macierz A składa się z takich elementów, że w i -tym wierszu i j -tej kolumnie znajduje się a_{ij} .

Macierze A i B są równe, gdy $A, B \in M_m^n(F)$ i jeśli $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, to $a_{ij} = b_{ij}$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Sumę macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$, $A, B \in M_m^n(F)$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Iloczyn macierzy $A = [a_{ij}]$, $A \in M_m^n(F)$, przez **skalar** $\lambda \in F$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = \lambda \times a_{ij}$.

Macierz zerową Θ definiujemy jako $\Theta = [0]$.

Uwaga 3.12. *W szczególności zauważmy, że dodawanie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy, a mnożenie przez skalar jest działaniem zewnętrznym.*

Przykłady:

(1) Wprost z definicji dodawania macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

(2) Dodawanie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

(3) Wprost z definicji mnożenia macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$ przez skalar z ciała $\mathbb{R}$:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 3.13. *Niech F będzie ciałem, niech $A, B, C \in M_m^n(F)$, niech $\lambda, \mu \in F$. Wówczas:*

- (1) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- (2) $A + B = B + A$,
- (3) $\Theta + A = A$,
- (4) $A + (-A) = \Theta$,
- (5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- (6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
- (7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- (8) $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \Theta$,
- (9) *jeśli $\lambda A = \Theta$, to $\lambda = 0$ lub $A = \Theta$.*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Uwaga 3.14. *W szczególności zauważamy, że $(M_m^n(F), +)$ jest grupą przemienną, w której elementem neutralnym jest Θ , a element przeciwny do A to $-A$.*