

Układy równań liniowych

Definicja:

Niech F będzie ciałem.

Układem m równań liniowych o niewiadomych $x_1, \dots, x_n$, $m, n \in \mathbb{N}$, o współczynnikach z ciała F nazywamy układ równań postaci:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_j \in F$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Definicja:

Niech F będzie ciałem.

Wielomian $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ nazywamy **formą stopnia m** , gdy jest sumą jednomianów stopnia m lub wielomianem zerowym.

Zbiór form stopnia m z pierścienia $F[x_1, \dots, x_n]$ będziemy oznaczali przez $F_h[x_1, \dots, x_n]_m$.

Formy stopnia 1 będziemy nazywali **formami liniowymi**.

Formy stopnia 2 będziemy nazywaliśmy **formami kwadratowymi**.

Uwaga:

Niech F będzie ciałem, niech $\mathcal{U}$ będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z F .

Lewe strony równań należących do $\mathcal{U}$ są formami liniowymi ze zbioru $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, a prawe elementami ciała F .

Definicja:

Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} l_1 = b_1 \\ l_2 = b_2 \\ \vdots \\ l_m = b_m \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych, $l_1, \dots, l_m \in F_h[x_1, \dots, x_n]$,
 $b_1, \dots, b_m \in F$.

Każde równanie liniowe:

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_m l_m = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m,$$

gdzie $a_1, \dots, a_m \in F$, nazywamy **kombinacją liniową** równań danego układu.

Rozwiązaniem układu $\mathcal{U}$ nazywamy każdy taki ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ elementów ciała F , że

$$l_i(a_1, \dots, a_n) = b_i,$$

dla $i \in \{1, \dots, m\}$.

Uwaga:

Każde rozwiązanie układu równań liniowych jest rozwiązaniem każdego równania będącego kombinacją liniową równań tego układu.

Definicja:

Dwa układy równań $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ nazywamy **równoważnymi** gdy każde równanie układu $\mathcal{U}_1$ jest kombinacją liniową równań układu $\mathcal{U}_2$ i vice versa.

Uwaga:

Równoważne układy równań mają identyczne zbiory rozwiązań.

Definicja:

Układ równań nazywamy **sprzecznym** gdy równanie $0 = 1$ jest kombinacją liniową równań tego układu.

Wniosek:

Sprzeczny układ równań nie ma rozwiązań.

Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Podamy metodę rozwiązywania tego układu przez **eliminację Gaussa**.

Etap I sprowadzenie do **postaci trójkątnej**.

Wybieramy równanie i niewiadomą o niezerowym współczynniku i nazywamy ją **niewiadomą bazową** 1 kroku.

Założmy, że jest nią x_1 ze współczynnikiem $a_{11} \neq 0$.

Mnożymy wybrane równanie (u nas równanie pierwsze) przez $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i odejmujemy od drugiego równania.

Postępując indukcyjnie mnożymy wybrane równanie przez $\frac{a_{1i}}{a_{11}}$ i odejmujemy od i -tego równania, $i \in \{2, \dots, m\}$.

Następnie przechodzimy do kroku 2, w którym wybieramy równanie spośród $i \in \{2, \dots, m\}$, niewiadomą bazową drugiego kroku i powtarzamy procedurę dla równań $i \in \{3, \dots, m\}$.

Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \widetilde{a}_{22}x_2 & +\widetilde{a}_{23}x_3 & +\dots & +\widetilde{a}_{2n}x_n & = \widetilde{b}_2 \\ & & & & \vdots & \\ & & \widetilde{a}_{rr}x_r & +\dots & +\widetilde{a}_{rn}x_n & = \widetilde{b}_r. \end{array} \right.$$

$x_1, \dots, x_r$ zostały wybrane jako niewiadome bazowe, a $x_{r+1}, \dots, x_n$ pozostają jako **parametry**.

Etap II sprowadzenie do postaci diagonalnej.

W ostatnim równaniu (u nas r) wybieramy niewiadomą bazową, powiedzmy x_r , i eliminujemy z równań $i \in \{1, \dots, r-1\}$ odejmując równanie r od i po wcześniejszym pomnożeniu przez $\frac{\widetilde{a_{ir}}}{\widetilde{a_{rr}}}$.

Następnie postępujemy indukcyjnie z równaniami $i \in \{1, \dots, r-2\}$.

Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 & + \overline{a_{1,r+1}}x_{r+1} + \overline{a_{1,r+2}}x_{r+2} + \dots + \overline{a_{1r}}x_r \\ & \widetilde{a_{22}}x_2 & + \overline{a_{2,r+1}}x_{r+1} + \overline{a_{2,r+2}}x_{r+2} + \dots + \overline{a_{2r}}x_r \\ & & \vdots \\ & & \widetilde{a_{rr}}x_r & \overline{a_{r,r+1}}x_{r+1} + \overline{a_{r,r+2}}x_{r+2} + \dots + \overline{a_{rm}}x_m \end{array} \right.$$

Etap III zapisujemy rozwiązanie przenosząc parametry na prawą stronę i dzieląc przez współczynniki przy $x_1, \dots, x_r$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{\overline{b_1}}{\overline{a_{11}}} - \frac{\overline{a_{1,r+1}}}{\overline{a_{11}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\overline{a_{1n}}}{\overline{a_{11}}} x_n \\ x_2 & = & \frac{\overline{b_2}}{\overline{a_{22}}} - \frac{\overline{a_{2,r+1}}}{\overline{a_{22}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\overline{a_{2n}}}{\overline{a_{22}}} x_n \\ & \vdots & \\ x_r & = & \frac{\widetilde{b_r}}{\widetilde{a_{rr}}} - \frac{\widetilde{a_{r,r+1}}}{\widetilde{a_{rr}}} x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a_{rn}}}{\widetilde{a_{rr}}} x_n. \end{array} \right.$$

Przykład:

1. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{Q}$.

Uwaga:

Chcąc zaoszczędzić czas układy równań zapisujemy jako **macierze**, czyli prostokątne tabliczki liczb, które są odpowiednimi współczynnikami w odpowiednich równaniach.

Przykłady:

2. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x + 4y + 2z + 5t = 0 \\ 2x + y + z + 4t = 0 \\ 3x + 5y + 3z + 2t = 0 \\ x + 4y + 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_7$.

3. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} (-2 - 4i)x + (-2 - 6i)y + (3 + 4i)z + (-2 - i)t = 0 \\ 2ix - 2iy + z - t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{C}$.

Algebra macierzy.

Definicja:

Macierzą nad ciałem F nazywamy prostokątną tablicę elementów ciała F .

Zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ oznaczamy $M_m^n(F)$.

Napis $A = [a_{ij}]$ oznacza, że macierz A składa się z takich elementów, że w i -tym wierszu i j -tej kolumnie znajduje się a_{ij} .

Macierze A i B są **równe**, gdy $A, B \in M_m^n(F)$ i jeśli $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, to $a_{ij} = b_{ij}$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Sumę macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$, $A, B \in M_m^n(F)$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Iloczyn macierzy $A = [a_{ij}]$, $A \in M_m^n(F)$, przez **skalar** $\lambda \in F$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = \lambda \times a_{ij}$.

Macierz zerową Θ definiujemy jako $\Theta = [0]$.

Uwaga:

W szczególności zauważmy, że dodawanie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy, a mnożenie przez skalar jest działaniem zewnętrznym.

Przykłady:

1. Wprost z definicji dodawania macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

2. Dodawanie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

3. Wprost z definicji mnożenia macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$ przez skalar z ciała $\mathbb{R}$:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $A, B, C \in M_m^n(F)$, niech $\lambda, \mu \in F$.
Wówczas:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
2. $A + B = B + A$,
3. $\Theta + A = A$,
4. $A + (-A) = \Theta$,
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
8. $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \Theta$,
9. jeśli $\lambda A = \Theta$, to $\lambda = 0$ lub $A = \Theta$.

Uwaga:

W szczególności zauważamy, że $(M_m^n(F), +)$ jest grupą przemianową, w której elementem neutralnym jest Θ , a element przeciwny do A to $-A$.