Zestaw zadań 7: Wyznaczniki.[1]

(1) Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{bmatrix}$ gdzie α, β, γ są miarami kątów trójkąta,

(g) $\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, (h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}$, gdzie $\varepsilon = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$,

(i) $\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\cos\beta & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & r\cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{bmatrix}$.

(2) Obliczyć następujce wyznaczniki (nad $\mathbb{R}$):

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, (e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, (f) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

(g) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$, (h) $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}$, (i) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

(j) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -16 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 125 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -460 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 176 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 176 \end{vmatrix}$, (k) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

[1] Wyznaczniki odkrył po raz pierwszy G. W. Leibniz w 1693 r. W 1750 odkrył je powtórnie Szwajcar Gabriel Cramer (nie mylić ze wspóczesnym matematykiem szwedzkim Carlem Haraldem Cramerem). Nazwę "wyznacznik" ("determinant") wprowadził w 1815 r. A. Cauchy. Dwie pionowe kreski jako symbol wyznacznika wprowadził w 1841 r. A. Cayley.

(3) Obliczyć:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 10 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{11}$, (c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 11 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ 1 & 10 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{13}$.

(4) Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy stopnia n :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}$, (g) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

(5) Niech $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, będzie macierzą kwadratową stopnia n. Pokazać, że $\det A$ jest liczbą cakowitą. Załóżmy dodatkowo, że $a_{ij} = \pm k$, gdzie k jest ustaloną liczbą cakowitą. Pokazać, że $2^{n-1}k^n$ dzieli $\det A$.

(6) Pokazać, że jeśli A jest macierzą antysymetryczn (tzn. $A^T = -A$) stopnia nieparzystego nad $\mathbb{R}$, to jest ona osobliwa, czyli $\det A = 0$.

(7) Liczby 20604, 53227, 25755, 20927 i 289 dzielą się przez 17. Pokazać (bez obliczania), że wyznacznik $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ również dzieli się przez 17.

(8) Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n. Jak zmieni się wyznacznik macierzy A, jeżeli:

(a) każdy element a_{ij} pomnożymy przez c^{i-j} (c ustalone),

(b) obrócimy macierz A o $90°$ wokół jej "środka" (zgodnie z ruchem wskazówek zegara),

(c) zapiszemy wiersze (kolumny) macierzy A w odwrotnej kolejności,

(d) do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy poprzednią kolumnę (poprzedni wiersz),

(e) do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy poprzednią kolumnę (poprzedni wiersz), a pierwszej kolumny (do pierwszego wiersza) dodamy starą ostatnią kolumnę (stary ostatni wiersz),

(f) do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy wszystkie porzednie kolumny (poprzednie wiersze).

(9) Znaleźć największą wartość wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia 3, której elementy są liczbami całkowitymi równymi
(a) 0 lub 1, (b) -1 lub 1.

(10) Przeanalizować Przykład 6.7 ze stron 158-159 z książki A.Białynickiego-Biruli (dowód wzoru na wyznacznik macierzy klatkowo-trójkątnej $\det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline D & B \end{array}\right] = \det A \det B$ przez indukcję względem stopnia klatki B).

(11) Sprawdzić tożsamości:

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ i & l \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ m & o \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ m & p \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

(c) Sformułować i udowodnić ogólne twierdzenie.

(12) Sprawdzić, że nastepująca równość jest tożsamością:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ i & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ i & l \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ m & o \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ m & p \end{vmatrix} \end{vmatrix} + (f-j) \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

(13) Zbadać rozwiązalność układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x - y + 2z = 10 \\ 2x + 7y - 3z = 8 \\ ax - by + cz = 20 \\ ax + by + cz = 44 \\ 10ax + 3by - cz = 26 \end{cases}$$

w zależności od parametrów a, b, c.

(14) Obliczyć wyznacznik macierzy

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$.

Wskazówka. Obliczyć wyznaczniki macierzy A^2 oraz BB^T.

(15) Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$. Sumy k-tych potęg pierwiastków

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$

są funkcjami symetrycznymi, więc wyrażają się przez współczynniki wielomianu (np. $s_0 = n$; z wzorów Viète[2] wynikają równości $s_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$, $s_2 = s_1^2 - 2\sum_{i<j} x_ix_j = \dfrac{a_1^2}{a_0^2} - 2\dfrac{a_2}{a_0}$ itd.)

Obliczyć wyznacznik D macierzy

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix}.$$

(*Wskazówka: obliczyć najpierw V^TV, gdzie $V = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest macierzą Vandermonde'a pierwiastków*).

Wyrazić wynik przez współczynniki wielomianu $f(X)$ gdy $n = 2$ i $f(X) = aX^2 + bX + c$ i gdy $n = 3$, a $f(X) = X^3 + pX + q$.

Wartość $\Delta = a_0^{2n-2}D$ nazywamy *wyróżnikiem wielomianu* $f(X)$[3]

(16) Sprawdzić, czy następujące macierze są odwracalne oraz w przypadku pozytywnej odpowiedzi obliczyć macierz odwrotną:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(17) Jeśli $A \in K_n^n$, $B \in K_m^m$, $C \in K_n^m$, $D \in K_m^n$, i $\det A \neq 0$ to

(a) obliczyć $\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I_m \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array}\right]$;

(b) wykazać, że $\det \left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array}\right] = \det A \cdot \det(B - CA^{-1}D)$;

(c) podzielić na klatki 2×2 macierz z przykładu (d) z poprzedniego zadania; porównać jej wyznacznik z wartością wyrażenia $\det A \det B - \det C \det D$.

[2]François Viète (1540-1603) - matematyk francuski, zwany "ojcem algebry". Usystematyzował osiągnięcia algebraiczne Odrodzenia. Wprowadził oznaczenia literowe nie tylko dla niewiadomych, ale i dla danych, np. współczynników równań, dzięki czemu pojawiły sie wzory matematyczne.

[3]Nazwa "wyróżnik" ("discriminant", od łacińskiego *discriminans*, od *discriminantis* - rozdzielający, odróżniający) pochodzi od J. Sylvestera.

(18) Rozwiązać następujące równania macierzowe:

(a) $X \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

(19) Rozwiązać układy równań macierzowych:

(a) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$.

(20) Obliczyć $(I + aE_{ir})^{-1}$, $i \neq r$.

(21) Wiadomo, że macierz odwracalną można "sprowadzić" do macierzy jednostkowej za pomocą przekształceń elementarnych na wierszach. Pokazać, że wykonując te same przekształcenia (w tej samej kolejności!) na macierzy jednostkowej otrzymamy macierz odwrotn ą do wyjściowej macierzy. Stosując tę metodę obliczyć jeszcze raz macierze odwrotne do macierzy z poprzednich zadań oraz następujących macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(22) (a) Pokazać, że jeżeli $A^2 = 0$, to macierz $I_n + A$ jest odwracalna i $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$.

(b) Pokazać, że jeżeli $A^m = 0$, to macierz $I_n + A$ jest odwracalna i znaleźć $(I_n + A)^{-1}$.

(23) Znaleźć kolejne potęgi macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ i wykorzystać je do obliczenia macierzy odwrotnej do macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(24) Pokazać, że dla $A, B \in K_n^n$ jeżeli macierz $I_n + AB$ jest odwracalna, to również macierz $I_n + BA$ jest odwracalna (lemat Vassersteina [4]) *Wskazówka*: Obliczyć $(I_n + BA)(I_n - B(I_n + AB)^{-1}A)$.

(25) Obliczyć macierze odwrotne do macierzy klatkowych: $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right]$. Obliczyć macierze odwrotne do następujących macierzy: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(26) *Komutatorem* $[A, B]$ macierzy nieosobliwych $A, B \in GLn(K)$ nazywamy macierz $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Wykazać, że

$$[I + aE_{ij}, I + bE_{kl}] = \begin{cases} I & \text{dla } j \neq k \text{ i } i \neq l \\ I + abE_{il} & \text{dla } j = k \text{ i } i \neq l \\ I - abE_{kj} & \text{dla } j \neq k \text{ i } i = l \end{cases}.$$

[4] L. N. Vasserstein, współczesny matematyk radziecki (do lat siedemdziesiątych) i amerykański (od lat osiemdziesiątych).