Zestaw zadań 7: Macierze. [1]

(1) Obliczyć iloczyny macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^2$,

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$, (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$, (g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(2) Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obliczyć:

(a) $A^2 + 2AB + B^2$ i $(A+B)^2$;
(b) $A^2 - 2AB + B^2$ i $(A-B)^2$;
(c) $A^2 - B^2$, $(A-B)(A+B)$ i $(A+B)(A-B)$.

(3) Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m zachodzą równości:

(a) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1} \\ 0 & a^m \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(4) Jeśli $A \in K_n^n$, $B \in K_m^m$, $C \in K_n^m$, $D \in K_m^n$, to macierz $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array}\right]$ nazywamy macierzą klatkową o klatkach A, D, C, B. Sprawdzić, że

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & D_1 \\ \hline C_1 & B_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_2 & D_2 \\ \hline C_2 & B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1A_2 + D_1C_2 & A_1D_2 + D_1B_2 \\ \hline C_1A_2 + B_1C_2 & C_1D_2 + B_1B_2 \end{array}\right].$$

(5) Dla $A \in K_m^n$, $B \in K_n^m$ udowodnić równość $tr(AB) = tr(BA)$.

(6) Dla $A \in K_m^n$, $B \in K_s^m$ udowodnić równość $(AB)^T = B^T A^T$. Podać przykład pary macierzy C, D dla których równość $(CD)^T = C^T D^T$ nie zachodzi.

(7) Znaleźć wszystkie takie macierze $A \in K_2^2$, że

(a) $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$, (b) $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (e) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(8) *Centralizatorem* macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy zbiór $Z(A) = \{X \in K_n^n : AX = XA\}$.

(a) Sprawdzić, że $Z(A)$ jest podalgebrą algebry K_n^n (tzn. jest podprzestrzenią przestrzeni K_n^n, zawiera macierz jednostkową I oraz jest zamknięty ze względu na mnożenie).

[1] Pojęcie macierzy wprowadzili angielscy matematycy: William Rowan Hamilton (1805 - 1865), Arthur Cayley (1821 - 1895) i John J. Sylvester (1814 - 1897) w latach 40-tych XIX w.

(b) Wyznaczyć $Z(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})$.

(c) Wyznaczyć $Z(A)$ w zależności od danej dowolnej macierzy $A \in K_2^2$.

(d) Dla jakich $A \in K_2^2$ zachodzi równość $Z(A) = lin(I, A)$?

(e) Udowodnić, że każda macierz $A \in K_2^2$ spełnia warunek $A^2 \in lin(I, A)$.

(9) Niech E_{ir} oznacza macierz kwadratową stopnia n, której element o wskanikach i, r równy jest 1, a pozostałe elementy są równe 0. Obliczyć:
(a) $E_{ir} \cdot E_{lk}$, (b) $A \cdot E_{ir}$, (c) $E_{ir} \cdot A$, (d) $A \cdot (I_n + aE_{ir})$, $i \neq r$, (e) $(I_n + bE_{ir}) \cdot A$, $i \neq r$, (f) $(I_n + aE_{ir})(I_n + bE_{ir})$, $i \neq r$,
gdzie $A \in K_n^n$, $a, b \in K$. Zinterpretować (d) oraz (e) w języku operacji elementarnych wykonanych na A.

(10) Wykazać, że dla dowolnego zbioru $\mathcal{A} \subset K_n^n$ i dla dowolnej macierzy $A \in K_n^n$, A jest przemienna z każdą macierzą ze zbioru $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest przemienna z każdą macierzą ze zbioru $lin(\mathcal{A})$.

(11) Macierze postaci aI_n , $a \in K$, nazywamy macierzami skalarnymi. Wykazać, że macierz $A \in K_n^n$ jest przemienna z wszystkimi macierzami ze zbioru K_n^n wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą skalarną.

(12) Wykaż, że zbiór macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

z działaniem mnożenia macierzy, jest grupą abelową.

(13) Wyznacz wszystkie macierze stopnia 2 takie, że $A^2 = I$.

(14) Wyznacz wszystkie macierze stopnia 2 takie, że $A^2 = 0$.

(15) Oblicz $f(A)$ jeśli

(a) $f(X) = X^2 - 2X - I$ i A $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $f(X) = X^2 - 5X - 3I$ i A $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$