Zestaw zadań 5: Ciała p^k-elementowe.

(1) (a) W ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian X^3+X+1 oblicz $101+111-110$.
(b) W ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian X^3+X^2+1 oblicz $101+111-110$.

(2) (a) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian X^4+X+1 oblicz $0101 \cdot 1100 + 0110$.
(b) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian X^4+X^3+1 oblicz $0101 \cdot 1100 + 0110$.

(3) (a) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian X^5+X^2+1 oblicz $(10101^{-1}+01101)\cdot 10100$.
(b) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5+X^3+X^2+X+1$ oblicz $(10101^{-1}+01101)\cdot 10100$.
(c) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian X^5+X^3+1 oblicz $(10101^{-1}+01101)\cdot 10100$.
(d) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5+X^4+X^3+X+1$ oblicz $(10101^{-1}+01101)\cdot 10100$.
(e) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5+X^4+X^3+X^2+1$ oblicz $(10101^{-1}+01101)\cdot 10100$.

(4) (a) W ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian X^3+X+1 rozwiąż równanie $101X+111=100$.
(b) W ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian X^3+X^2+1 rozwiąż równanie $101X+111=100$.

(5) (a) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian X^4+X+1 rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 1101X+0010y=1101 \\ 0110X+0101y=0011 \end{cases}$$

(b) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian X^4+X^3+1 rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 1101X+0010y=1101 \\ 0110X+0101y=0011 \end{cases}$$

(6) W ciele $GF(2^5)$ wyznaczonym przez wielomian X^5+X^2+1 podać liczbę rozwiązań układu $\begin{cases} 01101X+10110y=11100 \\ 11011X+01100y=11000 \end{cases}$.

(7) Wyznaczyć tabelkę kwadratów w ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian X^3+X+1.

(8) (a) W ciele $GF(^4)$ zdefiniowanym przez wielomian X^4+X+1 rozwiązać równanie $1001X^2+1010X+1000=0000$.
(b) W ciele $GF(^4)$ zdefiniowanym przez wielomian X^4+X^3+1 rozwiązać równanie $1001X^2+1010X+1000=0000$.

(9) (a) W pierścieniu wielomianów $GF(2^5)[X]$ nad ciałem $32-$elementowym zdefiniowanym przez wielomian X^5+X^2+1 wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $01010X^3+11000X^2+10100X+01110$ przez wielomian $10111X^2+0001X$.
(b) W pierścieniu wielomianów $GF(2^5)[X]$ nad ciałem $32-$elementowym zdefiniowanym przez wielomian X^5+X^3+1 wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $01010X^3+11000X^2+10100X+01110$ przez wielomian $10111X^2+0001X$.

(10) (a) Wyznaczyć $NWD(0001+0110X+1010X^2+0100X^3+0001X^4+0011X^5, 0110+0111X+0010X^2+0001X^3+0111X^4+0011X^5)$ w pierścieniu wielomianów $GF(2^4)[X]$ nad ciałem $16-$elementowym zdefiniowanym przez wielomian X^4+X+1.

(b) Wyznaczyć $NWD(0001 + 0110X + 1010X^2 + 0100X^3 + 0001X^4 + 0011X^5, 0110 + 0111X + 0010X^2 + 0001X^3 + 0111X^4 + 0011X^5)$ w pierścieniu wielomianów $GF(2^4)[X]$ nad ciałem 16$-$elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X^3 + 1$.

(11) (a) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia wielomianów $GF(2^5)[X]$ nad ciałem 32$-$elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^2 + 1$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(00101X^2 + 01001X^3 + 01000X^4) + b(X)(01001X^2 + 00010X^3 + 00011X^4) = 01000X^2 + 00111X^4 + 00010X^6$.

(b) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia wielomianów $GF(2^5)[X]$ nad ciałem 32$-$elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^3 + 1$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(00101X^2 + 01001X^3 + 01000X^4) + b(X)(01001X^2 + 00010X^3 + 00011X^4) = 01000X^2 + 00111X^4 + 00010X^6$.