Zestaw zadań 4: Wielomiany.

(1) W pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_4[X]$ wykonać wskazane działanie:
  (a) $(X^3+2X^2+3X+1)+(X^4+X^3+3X^2+2X+2)$;
  (b) $(2X^2+X+3)-(2X^4+3X^3+X^2+3X)$;
  (c) $(2X^3+2X^2+3)(3X^2+X+2)$;
  (d) $(2X^4+3)(2X^4+1)$.

(2) Podzielić wielomian f z resztą przez wielomian g:
  (a) $f(X)=5X^3+2X^2-X-7$, $g(X)=X^2+3X-1$ w $\mathbb{Z}[X]$;
  (b) $f(X)=5X^3+2X^2-X-7$, $g(X)=X^2+3X-1$ w $\mathbb{Z}_8[X]$;
  (c) $f(X)=2X^4+X^3+X^2-X+3$, $g(X)=3X^2+X+4$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
  (d) $f(X)=X^3-7$, $g(X)=X-2$ w $\mathbb{Z}[X]$.

(3) Wykorzystując schemat Hornera podzielić z resztą wielomian:
  (a) $X^4+9X^3+23X^2-16X+13$ przez $X-5$ w $\mathbb{Z}[X]$,
  (b) $X^5+4X^4+X^3+2X^2+2X+1$ przez $X+1$ w $\mathbb{Z}[X]$,
  (c) X^4+3X+2 przez $X+4$ w $\mathbb{Z}_6[X]$.

(4) Dobrać liczby $a,b\in\mathbb{Z}$, aby wielomian $X^5-4X^3+2X^2+aX+b\in\mathbb{Z}[X]$ przy dzieleniu przez $X-1$ dawał resztę 1, a przy dzieleniu przez $X-2$ resztę -5.

(5) Dobrać liczby $a,b\in\mathbb{Z}_6$, aby wielomian $2X^4+5X^3+4X^2+aX+b\in\mathbb{Z}_6[X]$ przy dzieleniu przez $X+1$ dawał resztę 5, a przy dzieleniu przez $X+3$ resztę 1.

(6) Wielomian o współczynnikach rzeczywistych przy dzieleniu przez $X-2$ daje resztę 1 zaś przy dzieleniu przez $X-1$ daje resztę 2. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X-1)(X-2)$?

(7) Wielomian o współczynnikach z $\mathbb{Z}_5$ przy dzieleniu przez $X+1$ daje resztę 2, przy dzieleniu przez $X+2$ daje resztę 3 zaś przy dzieleniu przez $X+3$ daje resztę 1. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X+1)(X+2)(X+3)$?

(8) Dobrać takie liczby całkowite a,b, aby wielomian $X^4+5X^3+aX^2+bX+3\in\mathbb{Z}[X]$ dzielił się przez wielomian X^2-2X-3.

(9) (a) Wyznaczyć $NWD(15+4X+21X^2+85X^3-73X^4+14X^5, 56+27X+86X^2+337X^3-197X^4+21X^5)$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{R}[X]$.
  (b) Wyznaczyć $NWD(1+6X+10X^2+4X^3+X^4+3X^5, 6+7X+2X^2+X^3+7X^4+3X^5)$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_{11}[X]$.
  (c) Wyznaczyć $NWD[(18+16i)+(24-26i)X+(57+58i)X^2+(19-7i)X^3+(-21-2i)X^4+(3+i)X^5, (34+38i)+(63-41i)X+(120+129i)X^2+(65+15i)X^3+(-27-4i)X^4+(3+i)X^5]$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{C}[X]$.

(10) (a) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{Z}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(4X^2+3X^3+2X^4)+b(X)(2X^2+5X^3+7X^4)=-6X^2-28X^3-68X^4-81X^5-57X^6$.
  (b) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{Z}_{11}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(5X^2+9X^3+8X^4)+b(X)(9X^2+2X^3+3X^4)=-8X^2+7X^4+2X^6$.
  (c) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{C}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)[(5+4i)X^2+(9-2i)X^3+(5+3i)X^4]+b(X)[(10+9i)X^2+(3-8i)X^3+(4+7i)X^4]=(55+33i)X^2+(126+82i)X^3+(396-39i)X^4+(29-58i)X^5+(145+46i)X^6$.