Zestaw zadań 3: Liczby zespolone.[1]

(1) Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniające równość:
(a) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$, (b) $(2+3i)x+(4-5i)y=6-2i$,
(c) $(4-3i)2x+(1+i)2y=7-12i$, (d) $\dfrac{2+i}{3-i}x+\left(\dfrac{4-i}{3-i}\right)^2 y=1+i$.

(2) Rozwiązać układ równań:
(a) $\begin{cases}(1+i)z+(2-i)w=2-21\\(1-i)z-(3+i)w=-3+3i\end{cases}$; (b) $\begin{cases}(3-i)z+(4+2i)w=2+6i\\(4+2i)z-(2+3i)w=5+4i\end{cases}$;
(c) $\begin{cases}\dfrac{z}{2-i}+\dfrac{w}{1+i}=2\\ \dfrac{5z}{(2-i)^2}+\dfrac{2w}{(1+i)^2}=3\end{cases}$.

(3) Dla dowolnej liczby całkowitej $n\in\mathbb{Z}$ obliczyć:
(a) i^n , (b) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, (c) $(1+i)^n$.

(4) Obliczyć:
(a) $(1+2i)^6$, (b) $(2+i)^7+(2-i)^7$, (c) $(1+2i)^5+(1-2i)^5$.

(5) Wykazać równość $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$i podać jej interpretację geometryczną[2].

(6) Rozwiązać równania:
(a) $z\overline{z}+(z-\overline{z})=3+2i$, (b) $i(z+\overline{z})+i(z-\overline{z})=2i-3$.

(7) Jakie twory na płaszczynie zespolonej określają równania i nierówności:
(a) $|z|<2$, (b) $|z-1|=3$, (c) $|z-1-2i|\le 3$,
(d) $1<|z|<5$, (e) $\dfrac{|z-3|}{|z+1|}\ge 1$, (f) $|z-c|+|z+c|=2a$,
(g) $\dfrac{\pi}{2}<Arg(z)\le\pi$, (h) $|z-i|=|z+i|$, (i) $arg\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{\pi}{2}$,
(j) $arg(z-z_0)=\phi$, ϕ dane, (k) $0\le Re(iz)\le 1$, (l) $Re(z^2)>1$.

(8) Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:
1, -1, i, $-i$,
$1+i$, $1-i$, $-1+i$, $1+i\sqrt{3}$,
$-1-i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-i$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}$,
$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

(9) Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:
$\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\sin\alpha+i\cos\alpha$, $\sin\alpha-i\cos\alpha$, $1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

(10) Rozwiązać równanie $z^5=1$.
(a) Korzystając z wzoru Moivre'a[3] narysować rozwiązania na płaszczyźnie Gaussa[4]

[1] Liczby zespolone, koniecznie potrzebne do znajdowania rzeczywistych pierwiastków wielomianów stopnia 3, pojawiły się po raz pierwszy w 1545 r. w "*Ars magna*"Girolamo Cardano (1501 - 1576). Symbol i dla $\sqrt{-1}$ wprowadził Leonhard Euler w 1777 r.

[2] Interpretację geometryczną liczb zespolonych odkrył C. Wessel w 1799 r., a potem niezależnie J. R. Argand w 1806 r.

[3] de Moivre Abraham (20V1667-27XI1754), matematyk angielski, członek Royal Society i francuskiej Akademii Nauk, odkrył w 1707 r. wzór na potęgę liczby zespolonej, zajmował się również szeregami potęgowymi, odkrył wzór asymptotyczny na $n!$ i twierdzenie graniczne de Moivre'a - Laplace'a w rachunku prawdopodobieństwa.

[4] Gauss, Carl Friedrich (30IV1777 - 23II1855), niemiecki matematyk, astronom, fizyk i kartograf. Znaczne osiągnięcia w każdej właściwie uprawianej w jego czasach dziedzinie matematyki podsumowało nadane mu miano księcia matematyków (*princeps mathematicorum*). Odkrył między innymi interpretację geometryczną liczb zespolonych, ale chcąc uszanować

(b) Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczbę $\sqrt{5}+1+i(\sqrt{10}-2\sqrt{5})$.

(11) Obliczyć:

(a) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{76}+1}{(1-i)^{37}}$, (b) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{32}+5}{(1+i)^{17}}$.

(12) Wyznaczyć:

$\sqrt{2i}$, $\sqrt{-8i}$, $\sqrt{3-4i}$, $\sqrt{-15+8i}$, $\sqrt{-3-4i}$,
$\sqrt{-11+60i}$, $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt{-8+6i}$.

(13) Rozwiązać równania:

(a) $z^2+3z+3+i=0$, (b) $z^2+(1+4i)z-(5+i)=0$,
(c) $z^2+z(1+i)+2i=0$, (d) $(4-3i)z^2-(2+11i)z-(5+i)=0$.

(14) Rozwiązać równania:

(a) $z^4+2z^2+4=0$, (b) $z^4+(15+7i)z^2+8=0$, (c) $z^4-(18+4i)z^2+77-36i=0$.

(15) Rozwiązać równania: (a) $z^6=\dfrac{(1+i)^3}{\sqrt{3}+i}$, (b) $(z+i)^n-(z-i)^n=0$.

(16) Wyznaczyć i narysować obraz brzegu kwadratu o wierzchołkach $-1-i$, $2-i$, $2+2i$ oraz $-1+2i$ przy odwzorowaniu $z\mapsto z^2$.

(17) Ułożyć tablicę dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych co $15°$.

(18) Ułożyć tablicę dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych co $3°$.

(19) Rozwiązać w ciele liczb zespolonych równania:

(a) $z^2+i|z|=0$, (b) $z^2+2|z|=0$.

(20) Obliczyć:

(a) $(1+2i)^6$, (b) $(2+i)^7+(2-i)^7$, (c) $(1+2i)^5-(1-2i)^7$.

(21) Rozwiązać równania:

(a) $(1+i)z^2-(3+7i)z+10i=0$;
(b) $(1+2i)z^2-(-1+8i)z+(-5+5i)=0$;
(c) $(1+2i)z^2-(1+7i)z+(-2+6i)=0$;
(d) $(1+i)z^2-(1+5i)z+(-2+6i)=0$;
(e) $(1-i)z^2-(7+3i)z+10i=0$;
(f) $(1-2i)z^2-(4+7i)z+(7+i)=0$;
(g) $(1+i)z^2-(3+3i)z+(4+2i)=0$;

(22) Obliczyć (podając **dokładne** wartości części rzeczywistej i urojonej):

(a) $\dfrac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}$; (b) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{42}}{(-1+i)^{31}}$; (c) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{36}}{(1+i)^{31}}$; (d) $\dfrac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$;
(e) $\dfrac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$; (f) $\dfrac{(-1+i)^{32}}{(-\sqrt{3}+i)^{28}}$; (g) $\dfrac{(-1-i)^{28}}{(1-i\sqrt{3})^{20}}$.

(23) (a) Sprawdzić, że liczba $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$ jest rzeczywista (*Wskazówka:* $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=1$).

(b) Obliczyć $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

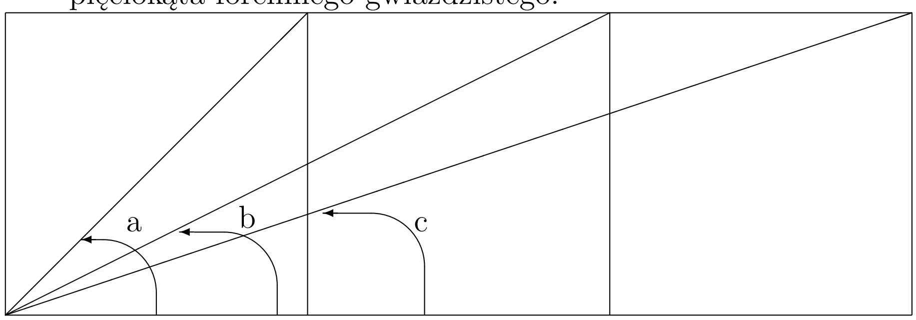
(24) (a) Narysować na paszczyźnie zespolonej pierwiastki z 1 stopni $3,4,5,6,7$ i 8.

---

pierwszeństwo Arganda nastawał na używanie nazwy "wykres Arganda". Mimo to płaszczyznę, na której punkt (a,b) utożsamiono z liczbą zespoloną $a+bi$ nazywamy płaszczyzną Gaussa.

(b) Narysować figury, powstające przez połączenie odcinkami ε^k z ε^{k+1} dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, dla wszystkich pierwiastków ε z 1 stopnia n, jeżeli $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (Przy $n = 4$ rysujemy cztery rysunki dla czterech możliwych ε, przy $n = 5$ - pięć rysunków, itd. Dla każdej wartości n jeden rysunek jest nieciekawy - dlaczego?).

(c) Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kątów między bokami pięciokąta foremnego i pięciokąta foremnego gwiaździstego.

(25) 

Sprawdzić, że $a + b + c = \frac{\pi}{2}$.

(26) (a) Wykazać, że dla liczb zespolonych $z \neq 1$ zachodzi równość $1 + z + z^2 + +z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

(b) Udowodnić równości:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

(27) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją wielomiany $V_n(X)$ i $W_n(X)$ takie, że zachodzą tożsamości: $\cos nx = V_n(\cos x)$ i $\sin nx = \sin x \cdot W_n(\cos x)$.

(28) Jaki punkt koła opisanego na kwadracie ma największy iloczyn odległości od wszystkich wierzchołków kwadratu? *(Wskazówka: wygodny do obliczeń jest kwadrat, wyznaczony przez pierwiastki stopnia* 4 *z* 1*).*

(29) Wykonać działania: (a) $\dfrac{1 + i\mathrm{tg}\alpha}{1 - i\mathrm{tg}\alpha}$, (b) $\dfrac{a + bi}{a - bi}$ (c) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^2 - (2 + i)^2}$, (d) $\dfrac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$.

(30) Dla danej liczby zespolonej z podać wzór na wszystkie takie liczby zespolone w, że
(a) $z \cdot w$ jest liczbą rzeczywistą; (b) $z \cdot w$ jest liczbą czysto urojoną.

(31) Udowodnić równoważność: $|z| = 1 \Leftrightarrow \underset{w \in \mathbb{C}}{\exists} \left[z = \frac{\overline{w}}{w}\right]$.

(32) Wykazać nierówności:
(a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, (b) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

(33) Pierwiastek stopnia n z 1 nazywamy *pierwotnym*, jeśli nie jest on pierwiastkiem z 1 stopnia niższego, niż n. Wykazać, że

(a) liczba $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(k, n) = 1$;

(b) ε jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy każdy pierwiastek z 1 stopnia n jest postaci ε^k dla penej liczby całkowitej k.

(34) Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 6x + 13$ wiedząc, że jednym z nich jest $3 + 2i$.