

Zestaw zadań 13: Wektory i wartości własne

- (1) Niech $V = V_1 \oplus V_2$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K , w którym $1 + 1 \neq 0$. Znaleźć wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze rzutu V na V_1 wzdłuż V_2 oraz symetrii V względem V_1 i wzdłuż V_2 .
- (2) Załóżmy, że $\varphi \in \text{End}(V)$. Pokazać, że
 - a) jeżeli $W < V$ oraz $\text{Im } \varphi \subset W$, to W jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu φ .
 - b) jeżeli W jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu φ , to $\varphi(W)$ oraz $\varphi^{-1}(W)$ są również podprzestrzeniami niezmienniczymi endomorfizmu φ .
 - c) jeżeli W_1 oraz W_2 są podprzestrzeniami niezmienniczymi endomorfizmu φ , to $W_1 \cap W_2$ oraz $\text{lin}(W_1 \cup W_2)$ są również podprzestrzeniami niezmienniczymi endomorfizmu φ .
 - d) jeżeli $\varphi \in \text{Aut}(V)$ oraz W jest podprzestrzenią niezmienniczą φ , to W jest podprzestrzenią niezmienniczą φ^{-1} .
- (3) Niech $a_1, \dots, a_k$ będą parami różnymi liczbami rzeczywistymi. Znaleźć wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^k)$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_k x_k \end{bmatrix}$.
- (4) Załóżmy, że $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ oraz $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Pokazać, że jeżeli W jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu φ , to $\psi(W)$ jest również podprzestrzenią niezmienniczą φ . Zauważyć, że w charakterze ψ można wziąć φ^k , $k \in \mathbb{N}$.
- (5) Znaleźć wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze endomorfizmu φ przestrzeni linowej $\mathbb{R}[X]_n$ określonego wzorem $\varphi(f) = f'$, $f \in \mathbb{R}[X]_n$.
- (6) Endomorfizm $\varphi \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$ ma w bazie $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right)$ macierz

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; \text{ b) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wartości własne i wektory własne endomorfizmu φ . Jakie będzie rozwiązanie, jeżeli założymy, że $\mathcal{A}$ jest bazą standardową? Jakie będzie rozwiązanie, jeżeli założymy, że $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$?

- (7) Macierz A jest macierzą endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ w bazie standardowej. Obliczyć wartości oraz wektory własne endomorfizmu φ . Skonstruować (o ile to możliwe) bazę przestrzeni $\mathbb{C}^n$ złożoną z wektorów własnych φ . Znaleźć (o ile to możliwe) macierz $C \in GL(n, \mathbb{C})$ taką, że macierz $C^{-1}AC$ jest macierzą diagonalną.

$$n = 2 : \text{ (a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}; \text{ (b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \text{ (c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; \text{ (d) } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$n = 3 : \text{ (e) } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}; \text{ (f) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ (g) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix},$$

$$n = 4 : \text{ (h) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ (i) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ (j) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{ (k) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \text{ (l) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}; \text{ (m) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (8) Obliczyć wielomian charakterystyczny endomorfizmu, który w pewnej bazie ma macierz postaci

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \text{ b) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Czy każdy wielomian unormowany, z dokładnością do znaku, może być wielomianem charakterystycznym jakiegoś endomorfizmu?

- (9) Pokazać, że odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}[X]_n \rightarrow \mathbb{R}[X]_n$ określone wzorem $\varphi(f(X)) = f(aX + b)$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $a \neq 0, \pm 1$, jest przekształceniem liniowym. Znaleźć wszystkie wartości własne endomorfizmu φ .
- (10) Załóżmy, że $f \in K[X]$. Pokazać, że

a) każdy wektor własny endomorfizmu φ przestrzeni liniowej V (nad K) jest wektorem własnym endomorfizmu $f(\varphi)$;

b) jeżeli λ jest wartością własną endomorfizmu φ przestrzeni liniowej V (nad K), to $f(\lambda)$ jest wartością własną endomorfizmu $f(\varphi)$.

- (11) Znaleźć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych endomorfizmów liniowych rzeczywistych przestrzeni współrzędnych o następujących macierzach w bazie kanonicznej

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; & \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; & \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; & \text{d) } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}; \\ \text{(e) } \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}; & \text{(f) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \text{(g) } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

- (12) Znaleźć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych endomorfizmów liniowych zespolonych przestrzeni współrzędnych o następujących macierzach w bazie kanonicznej:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}; \text{ b) } \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \text{ dla } a \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (13) Załóżmy, że a^2 jest wartością własną endomorfizmu φ^2 . Pokazać, że a lub $-a$ jest wartością własną endomorfizmu φ .

- (14) Znaleźć wzór na elementy macierzy A^n , jeżeli $A =$

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \text{ (b) } \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}; \text{ (c) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \text{ (d) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

W każdym z przypadków obliczyć A^{1995} .

- (15) Znaleźć wzór na n -ty wyraz ciągu a_n , gdy

- a) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (ciąg Fibonacciego¹; uzyskany wzór nosi nazwę wzoru Bineta²),
- b) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$.
- (16) Pokazać, że jeżeli $\varphi \in \text{Aut}(V)$, to φ oraz φ^{-1} mają te same wektory własne.
- (17) Pokazać, że jeżeli $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ oraz $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, to $V(a, \varphi) := \{\alpha \in V : f(\alpha) = a\alpha\}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu ψ .
- (18) Niech $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ będzie endomorfizmem liniowym. Udowodnić, że istnieje taka baza przestrzeni $\mathbb{C}^2$, w której φ ma macierz $\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$ dla pewnych $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.
- (19) Dla dowolnych dwóch endomorfizmów φ, ψ skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej udowodnić, że:
- $\text{tr}(\varphi \circ \psi) = \text{tr}(\psi \circ \varphi)$;
 - wielomiany charakterystyczne endomorfizmów $\varphi \circ \psi$ i $\psi \circ \varphi$ są równe.
 - Które z endomorfizmów z zadań 11 i 12 są diagonalizowalne?
- (20) Dla jakich wartości parametrów a, b, c przebiegających zbiór elementów ciała K macierze:
- $\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$;
 - $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$
- są diagonalizowalne?
- (21) Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $A \in K_n^n$. Udowodnić, że
- jeśli $a_1, \dots, a_m$ są wszystkimi wartościami własnymi A , to dla dowolnej liczby naturalnej r skalary $a_1^r, \dots, a_m^r$ są wszystkimi wartościami własnymi A^r ;
 - jeśli A jest macierzą nieosobliwą i $a_1, \dots, a_m$ są wszystkimi wartościami własnymi A , to $a_1 \neq 0, \dots, a_m \neq 0$ i $a_1^{-1}, \dots, a_m^{-1}$ są wszystkimi wartościami własnymi macierzy A^{-1} .
- (22) Niech $\varphi : \mathbb{R}[X]_3 \rightarrow \mathbb{R}[X]_3$ będzie przekształceniem danym wzorem $\varphi(f(X)) = ((X+3)f(X))'$. Sprawdzić, że φ jest przekształceniem liniowym i obliczyć jego wartości własne i wektory własne.
- (23) Udowodnić, że jeśli endomorfizmy $\varphi_1 : V_1 \rightarrow V_1$ i $\varphi_2 : V_2 \rightarrow V_2$ są diagonalizowalne, to endomorfizm $\text{Hom}(\varphi_1, \varphi_2) : \text{Hom}(V_1, V_2) \rightarrow \text{Hom}(V_1, V_2)$ określony wzorem $\psi \mapsto \varphi_2 \circ \psi \circ \varphi_1$ też jest diagonalizowalny. Wyrazić jego wartości własne i wektory własne przez wartości własne i wektory własne endomorfizmów φ_1, φ_2 .
- (24) Niech A będzie podzbiorem przestrzeni endomorfizmów $\text{End}(V)$ przestrzeni wektorowej V nad algebraicznie domkniętym ciałem skalarów. Załóżmy, że dla każdego $\varphi, \psi \in A$ zachodzi równość $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Udowodnić, że istnieje wektor $\alpha \in V$, który jest wektorem własnym wszystkich endomorfizmów $\varphi \in A$.
- (25) Niech $f(X) \in K[X]$ będzie wielomianem, a φ - endomorfizmem przestrzeni wektorowej V . Wykazać, że jeśli $v \in V$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ należącym do wartości własnej α , to v jest wektorem własnym $f(\varphi)$ należącym do wartości własnej $f(\alpha)$: $\varphi(v) = \alpha v \Rightarrow f(\varphi)(v) = f(\alpha)v$.
- (26) Wyznaczyć wszystkie takie macierze $A \in K_2^2$ dla których równanie $X^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = A$ **nie** ma rozwiązania.

¹Fibonacci (wł. filius Bonacci - "syn Bonacciego"), wł. Leonardo z Pizy, 1180 - 1240, autor *Liber Abaci* i *Practica Geometriae*, sformułował słynne zadanie o rozmnażaniu się królików, które uważa się za początek jednego z trzech działów ekologii - teorii populacji; ilość par królików w roku n w tym zadaniu jest n -tym wyrazem ciągu Fibonacciego.

²Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) - matematyk i astronom francuski; wprowadził termin " β -funkcja"; zajmował się również liniowymi równaniami różnicowymi ze zmiennymi współczynnikami.

- (27) Wyznaczyć wartości własne endomorfizmu $\psi = \varphi^2 - 2\varphi + 3Id_{\mathbb{C}^3}$, jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ jest

macierzą φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{C}^3$.

- (28) Niech $a \in \mathbb{Q}$, $M_1 = [a]$, $M_{n+1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ a \end{array}$. Wyprowadzić wzór na wyraz ogólny

ciągu $\det(M_n)$.

- (29) Wyznaczyć wartości własne i wektory własne endomorfizmu φ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$, jeśli jego macierz A względem bazy kanonicznej spełnia równość

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (30) Wyznaczyć $\dim V(1, \varphi)$ i $\dim V(-1, \varphi)$, sprawdzić, czy φ jest diagonalizowalny, gdy φ ma w pewnej bazie macierz A :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & -6 & -20 & -45 \\ 0 & 4 & 15 & 36 \\ 0 & -1 & -4 & -10 \end{bmatrix}, V = \mathbb{Q}^4;$

b) $A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 35 & 56 \\ -20 & -45 & -84 & -140 \\ 15 & 36 & 70 & 120 \\ -4 & -10 & -20 & -35 \end{bmatrix}, V = \mathbb{Q}^4;$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -16 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 125 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -460 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 176 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 176 \end{bmatrix}, V = \mathbb{Q}^6.$

W każdym przypadku obliczyć A^2 , A^{-1} i wielomian charakterystyczny A .

- (31) Wykazać, że dla dowolnego endomorfizmu $\varphi \in \text{End } V$, jeśli $\varphi^2 = \varphi$, to φ i $Id_V - \varphi$ są diagonalizowalne.
- (32) W zależności od macierzy $A \in K_2^2$ wyznaczyć wartości własne endomorfizmu $j \in \text{End } K_2^2$ określonego wzorem $\varphi(X) = A \cdot X$.

(33) Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

a) wyprowadzić wzór na A^n ;

b) znaleźć wszystkie rozwiązania $X \in K_3^3$ równania $X^2 = A$, dla $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$.

- (34) Zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ jest podciałem ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

a) Sprawdzić, że $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{Q}$ i znaleźć choć jedną bazę tej przestrzeni.

b) Znaleźć wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne endomorfizmu φ przestrzeni $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ gdy $\varphi(x) = \sqrt[3]{2}x$.

c) Wiedząc, że $y = 1 - \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ jest jedynym rzeczywistym pierwiastkiem wielomianu $f(X) = X^3 - 3X^2 + 21X - 125$, wyznaczyć wielomian charakterystyczny i wartości własne endomorfizmu ψ przestrzeni $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ takiego, że $y(x) = \psi x$.

$$(35) \text{ Sprawdzić, czy endomorfizm, mający względem pewnej bazy macierz } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & -40 \\ 1 & 0 & 0 & 10 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalny. Obliczyć A^{-1} .

$$(36) \text{ Endomorfizm } \varphi \text{ przestrzeni } \mathbb{C}^4 \text{ ma względem bazy kanonicznej macierz } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{a) Sprawdzić, że wektory } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} \text{ są wektorami własnymi } \varphi.$$

b) Niech P będzie taką macierzą, że $P^{-1}AP$ jest macierzą diagonalną. Obliczyć wektory własne i wartości własne macierzy PP^T .

(37) Niech $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$. *Cyrkulantem* lub *wyznacznikiem cyklicznym* ciągu $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ na-

zywamy wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$. Niech ε będzie pierwiastkiem

stopnia n z 1 w ciele K (lub pewnym rozszerzeniu tego ciała) i niech $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} \in K[X]$.

$$\text{a) Sprawdzić, że wektor } \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix} \text{ jest wektorem własnym macierzy } A \text{ należącym do wartości}$$

własnej $f(\varepsilon)$.

b) Obliczyć wyznacznik macierzy A .