

Zestaw zadań 10: Kombinacje liniowe wektorów. Baza i wymiar.

- (1) Pokazać, że
- $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Leftrightarrow \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$,
 - dla dowolnych $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ oraz $x \in K$, zachodzi równość $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + x\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$,
 - dla dowolnego $i = 1, \dots, n$, oraz $x \in K$, $x \neq 0$, zachodzi równość $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$.
- (2) Sprawdzić, czy wektory α oraz β są kombinacjami liniowymi układu $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeżeli

$$\text{a) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Czy zapis wektora α w postaci kombinacji liniowej układu $\mathcal{A}$ jest jednoznaczny?

- (3) Dla jakiej liczby zespolonej $c \in \mathbb{C}$ wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$ jest kombinacją liniową wektorów $\begin{bmatrix} c \\ -1+i \\ 1+i \end{bmatrix}$

oraz $\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -c \end{bmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$?

- (4) Sprawdzić, czy układ $\left(\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ i \end{bmatrix} \right)$ wektorów przestrzeni $\mathbb{C}^3$ jest liniowo niezależny¹.

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1+2i \end{bmatrix}$ jako ich kombinację liniową.

- (5) Sprawdzić, że każda kombinacja liniowa $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ wektorów $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ z przestrzeni $\mathbb{C}^4$ spełnia warunek $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, a nie każda spełnia warunek $|x_4| \leq 2$.

- (6) Znaleźć taki wektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{Z}_2^3$, aby wektory $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ były liniowo niezależne. Ile rozwiązań ma to zadanie?

- (7) Zbiór $\mathbb{C}$ liczb zespolonych z działaniami dodawania liczb zespolonych i mnożenia liczb zespolonych przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią wektorów nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Oznaczamy ją symbolem $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Sprawdzić, że każde trzy wektory z $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ są liniowo zależne.

- (8) Sprawdzić, czy układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni K^4 jest liniowo zależny, jeżeli

¹Pojęcie liniowej niezależności wektorów pochodzi od Grassmanna.

$$\begin{aligned}
\text{a) } K = \mathbb{Z}_7, \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \\
\text{b) } K = \mathbb{R}, \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}. \\
\text{c) } K = \mathbb{C}, \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4+i \\ 0 \\ 5+3i \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2i \\ i \\ 2 \end{bmatrix}. \\
\text{d) } K = \mathbb{Z}_5, \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Jeżeli to możliwe, przedstawić jeden z wektorów tego układu jako kombinację liniową pozostałych.

- (9) Wykazać, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych skalarów $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ z równości $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$ wynika, że $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Wyjaśnić, jaki związek ma ten fakt z pytaniem, zadany w zadaniu 2.
- (10) Pokazać, że niezerowe wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowo niezależne wtedy i tylko, gdy $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \text{lin}(\alpha_1) \oplus \dots \oplus \text{lin}(\alpha_k)$.
- (11) Zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia przez liczby wymierne jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych. Oznaczamy ją symbolem $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. Sprawdzić, że $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.
- (12) Niech K będzie ciałem, a $B \subset A$ zbiorami. Dla funkcji $f \in K^A$ oznaczmy $f|_B$ element K^B taki, że dla każdego $x \in B$ zachodzi równość: $(f|_B)(x) = f(x)$. Funkcję $f|_B$ nazywamy ograniczeniem funkcji f do podzbioru B . Jaką prawdziwą implikację można utworzyć ze zdań: " $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo zależne w K^A ", " $f_1|_B, f_2|_B, \dots, f_n|_B$ są liniowo zależne w K^B "? Jaką prawdziwą implikację można utworzyć ze zdań: " $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo niezależne w K^A ", " $f_1|_B, f_2|_B, \dots, f_n|_B$ są liniowo niezależne w K^B "?
- (13) Sprawdzić, czy f_1, f_2, f_3 są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, jeżeli
 - a) $f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin x, f_3(x) = \sin 2x$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 - b) $f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin^2 x, f_3(x) = \cos 2x$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- (14) Sprawdzić, czy $1, X, X^2, \dots, X^n$ są liniowo niezależne w przestrzeni wektorowej $K[X]$. Sprawdzić, czy dla danego $a \in K$, wielomiany $1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n$ są liniowo niezależne w tej samej przestrzeni.
- (15) Sprawdzić, czy $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, jeżeli $f_i(x) = |x - 1| \cdot |x - 2| \cdot \dots \cdot |x - i|$ dla $x \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.
- (16) Sprawdzić, czy $\frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x-2}, \dots, \frac{1}{x-n}$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{Q}(X)$ nad ciałem liczb wymiernych.
- (17) Niech $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ będzie układem niezerowych wektorów przestrzeni V . Pokazać, że układ $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \text{lin}(\beta_1) \oplus \text{lin}(\beta_2) \oplus \dots \oplus \text{lin}(\beta_n)$.

(18) Pokazać, że wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^n$ i znaleźć współrzędne wektora β w tej bazie, jeżeli

$$\text{a) } n = 3; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } n = 3; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } n = 4; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(19) Wyznaczyć bazy podprzestrzeni rozwiązań następujących układów równań (nad $\mathbb{R}$):

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

(20) Wyznaczyć bazę i wymiar² podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ gdy:

$$\text{a) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(21) Wybrać bazę podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \subset \mathbb{Z}_7^m$ spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, jeżeli

$$\text{a) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix};$$

²Pojęcie wymiaru przestrzeni wektorowej pochodzi od Grassmanna.

$$\text{d) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wybrać dowolne bazy powyższych podprzestrzeni, niekoniecznie spośród wektorów

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

- (22) Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów postaci:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Pokazać, że jeśli U jest właściwą podprzestrzenią przestrzeni liniowej V , to istnieje baza przestrzeni V , której wszystkie wektory należą do $V \setminus U$.

- (23) Pokazać, że jeśli wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej V nad ciałem K , to dla dowolnych $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, wektory:

a) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + x\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ dla $x \in K$,

b) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, x\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ dla $x \in K, x \neq 0$

również tworzą bazę przestrzeni V .

- (24) Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której wektor ε_1 ma współrzędne $(1, 2, 1)$ oraz bazę, w której wektor ten ma współrzędne $(1, 1, 1)$, a wektor $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ współrzędne $(1, 0, 0)$.

- (25) Znaleźć bazę każdej z niżej wypisanych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz bazę sumy algebraicznej $U_i + U_j$, jak i części wspólnej $U_i \cap U_j$ każdej pary podprzestrzeni:

$$\text{a) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right), U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$\text{b) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right), U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right),$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

$$\text{c) } U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\},$$

$$U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right).$$

$$\text{d) } U_1 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right), U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

- (26) Niech ciało K ma q elementów. Obliczyć, ile przestrzeni K^n ma różnych
 a) wektorów, b) baz.