

12. WYKŁAD 12: STRUKTURA ZBIORU ROZWIĄZAŃ UKŁADU RÓWNAŃ.

Definicja 12.1. Niech F będzie ciałem, niech $\mathcal{U}_0$ będzie układem jednorodnym m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z ciała F . Niech U_0 będzie podprzestrzenią F^n rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Każdą bazę U_0 będziemy nazywać **układem fundamentalnym** rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$, a każde przedstawienie parametryczne U_0 **rozwiązaniem ogólnym** układu $\mathcal{U}_0$.

Niech $\mathcal{U}$ będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z ciała F . Niech W będzie warstwą podprzestrzeni przestrzeni F^n wyznaczoną przez rozwiązania układu $\mathcal{U}$. Każde przedstawienie parametryczne W nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** układu $\mathcal{U}$.

Twierdzenie 12.2. Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$ nie wszystkich równych zeru. Wówczas U jest hiperpłaszczyzną.

Dowód. Załóżmy, że $a_1 \neq 0$. Wówczas $e_1 \notin U$, a więc $\dim U \leq n - 1$. Ponadto $e_2 - \frac{a_2}{a_1}e_1, e_3 - \frac{a_3}{a_1}e_1, \dots, e_n - \frac{a_n}{a_1}e_1 \in U$ i wszystkie te wektory są liniowo niezależne. $\square$

Wniosek 12.3. Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie wyznaczona przez układ m równań jednorodnych o n niewiadomych. Wówczas $\dim U \geq n - m$.

Dowód. Wynika wprost z Twierdzeń 12.2 i 11.18. $\square$

Twierdzenie 12.4. Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie hiperpłaszczyzną. Wówczas U jest wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$ nie wszystkich równych zeru.

Dowód. Załóżmy, że $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ jest bazą podprzestrzeni U . Niech

$$\alpha_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}], \text{ dla } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Rozważmy układ równań

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + \dots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

i niech U_0 oznacza podprzestrzeń rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Wobec Wniosku 12.3 $\dim U_0 \geq n - (n-1) = 1$, niech zatem $\theta \neq [b_1, \dots, b_n] \in U_0$. Podprzestrzeń W wyznaczona przez równanie $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$ jest hiperpłaszczyzną wobec Twierdzenia 12.2. Ponadto, wobec określenia $[b_1, \dots, b_n], \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in W$ i tym samym $U = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \subset W$. Ponieważ $\dim U = \dim W = n - 1$ oznacza to, że $U = W$. $\square$

Wniosek 12.5. Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie podprzestrzenią k -wymiarową. Wówczas U jest wyznaczona przez układ złożony z $n - k$, ale nie mniej, jednorodnych równań liniowych.

Dowód. Wynika wprost z Twierdzenia 12.6 i Wniosku 11.19. $\square$

Twierdzenie 12.6. Niech F będzie ciałem, niech $W_1, \dots, W_k < F^n$ będą hiperpłaszczyznami. Niech $l_i = 0$ będzie równaniem hiperpłaszczyzny W_i , $l_i \in F_h[x_1, \dots, x_n]$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Wówczas $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$ wtedy i tylko wtedy, gdy formy liniowe $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne.

Dowód. Załóżmy, że formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo zależne. Wobec Twierdzenia 10.3 jedna z tych form jest kombinacją liniową pozostałych – możemy założyć, że l_k jest kombinacją liniową form $l_1, \dots, l_{k-1}$.

Wówczas układy

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_k = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_{k-1} = 0 \end{cases}$$

mają identyczne zbiory rozwiązań, a więc $W_1 \cap \dots \cap W_k = W_1 \cap \dots \cap W_{k-1}$. Wobec Twierdzenia 11.18, $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_{k-1}) \geq n - k - 1 = n - k + 1 > n - k$, więc $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) > n - k$. Wobec Twierdzenia 11.18 i prawa kontrapozycji udowodniliśmy zatem, że jeżeli $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$, to formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne.

Założmy, że formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne. Układ $(l_1, \dots, l_k)$ uzupełniamy do bazy $(l_1, \dots, l_k, \dots, l_n)$ przestrzeni liniowej $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$ form liniowych n zmiennych. Niech W_i będzie hiperpłaszczyzną wyznaczoną przez równanie $l_i = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Pokażemy, że $W_1 \cap \dots \cap W_n = \{\theta\}$. Ponieważ $l_1, \dots, l_n$ generują przestrzeń $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, więc formy $x_1, \dots, x_n$ są kombinacjami liniowymi form $l_1, \dots, l_n$. Tym samym każdy wektor będący rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_n = 0 \end{cases}$$

jest też rozwiązaniem układu $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$, a więc $W_1 \cap \dots \cap W_n \subset \{\theta\}$ i tym samym $W_1 \cap \dots \cap W_n = \{\theta\}$.

W szczególności $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_n) = 0$. Ponieważ $\dim(W_{k+1} \cap \dots \cap W_n) \geq n - (n - k) = k$, więc wobec Wniosku 11.15

$$\begin{aligned} 0 &= \dim(W_1 \cap \dots \cap W_n) \geq \dim[(W_1 \cap \dots \cap W_k) \cap (W_{k+1} \cap \dots \cap W_n)] \\ &\geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) + \dim(W_{k+1} \cap \dots \cap W_n) - n \\ &\geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) + k - n, \end{aligned}$$

czyli $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) \leq n - k$ i tym samym, wobec Twierdzenia 11.18, $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$. $\square$

Wniosek 12.7. Niech F będzie ciałem, niech $l_1, \dots, l_k \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, niech $U < F^n$ będzie podprzestrzenią wyznaczoną przez układ równań

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_k = 0. \end{cases}$$

Wówczas $\dim U = n - \dim \text{lin}(l_1, \dots, l_k)$

Dowód. Niech $\dim \text{lin}(l_1, \dots, l_k) = r$ i niech $l_{i_1}, \dots, l_{i_r}$ będzie maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem $\{l_1, \dots, l_k\}$. Wówczas U jest wyznaczona przez układ

$$\begin{cases} l_{i_1} = 0 \\ \vdots \\ l_{i_r} = 0. \end{cases}$$

i wobec Twierdzenia 12.6 $\dim U = n - r = n - \dim \text{lin}(l_1, \dots, l_k)$. $\square$

Definicja 12.8. Niech F będzie ciałem. Niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{array} \right].$$

Oznaczmy ponadto:

$$\alpha_j = \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \right], \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$. Liczbę $\dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$ nazywamy **rzędem wierszowym** macierzy A , a liczbę $\dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazywamy **rzędem kolumnowym** macierzy A .

Twierdzenie 12.9. Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Rząd kolumnowy macierzy A równy jest jej rzędowi wierszowemu.

Dowód. Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{array} \right]$$

oraz

$$\alpha_j = \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \right], \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$. Podprzestrzeń $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni F^n jest identyczna z podprzestrzenią rozwiązań układu

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wobec Twierdzenia 11.13:

$$\dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n - \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Wobec Wniosku 12.7:

$$\dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n - \dim \text{lin}(l_1, \dots, l_m),$$

gdzie $l_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$. Przekształcenie $\phi : F_h[x_1, \dots, x_n]_1 \rightarrow F^n$ dane wzorem

$$\phi(c_1x_1 + \dots + c_nx_n) = [c_1, \dots, c_n]$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, a więc $\dim \text{lin}(l_1, \dots, l_m) = \dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Reasumując:

$$n - \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n - \dim \text{lin}(l_1, \dots, l_m) = n - \dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m),$$

a więc $\dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$. $\square$

Definicja 12.10. Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Wspólną wartość rzędu kolumnowego i rzędu wierszowego macierzy A nazywamy **rzędem** macierzy A i oznaczamy $r(A)$.

Wniosek 12.11. Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Wartość $r(A)$ nie ulegnie zmianie, jeżeli na kolumnach lub wierszach macierzy A wykonamy operacje elementarne typu 1, 2 lub 3.

Przykład:

- (1) Powyższy wniosek daje praktyczną metodę znajdowania rzędu macierzy: najpierw sprowadzamy przez operacje elementarne daną macierz do postaci trójkątnej, a następnie zliczamy niezerowe wiersze lub kolumny. Dla przykładu obliczymy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mamy kolejno:

$$\begin{aligned} r(A) &= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 7w_1 \\ w_4 - w_1 \end{matrix} = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} \\ \\ w_2 : (-2) \\ k_2 - k_1 \quad k_3 - 2k_1 \quad k_4 - k_1 \end{matrix} \\ &= (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ w_3 + w_2 \\ \\ \end{matrix} = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} \\ \\ w_3 \downarrow \\ w_4 \uparrow \end{matrix} \\ &= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} \\ \\ w_4 + 12w_3 \\ \end{matrix} = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \right) = 4, \\ &\text{gdyż wektory } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ (lub, symetrycznie, } [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 3], \\ &[0, 0, 0, 30]) \text{ są liniowo niezależne.} \end{aligned}$$

Wniosek 12.12. Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Wówczas $r(A) = r(A^T)$.

Wniosek 12.13. Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

będzie układem m jednorodnych równań liniowych o współczynnikach z ciała F , niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

niech $U_0 < F^n$ będzie podprzestrzenią rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Wówczas

$$\dim U_0 = n - r(A).$$

Dowód. Wynika wprost z przyjętych definicji i z Wniosku 12.7. □

Wniosek 12.14 (twierdzenie Kroneckera-Capelliego). *Niech F będzie ciałem, niech*

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{oraz } \mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

będą układami m równań liniowych o współczynnikach z ciała F i m jednorodnych równań liniowych o współczynnikach z ciała F otrzymanym z równań układu $\mathcal{U}$ przez zastąpienie prawych stron zerami, niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{oraz } A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

niech $U_0 < F^n$ będzie podprzestrzenią rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Wówczas układ $\mathcal{U}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$. Ponadto jeśli układ $\mathcal{U}$ ma choć jedno rozwiązanie, to wówczas zbiór wszystkich rozwiązań jest warstwą podprzestrzeni U_0 , przy czym $\dim U_0 = n - r(A)$. W szczególności układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0) = n$.

Dowód. Wystarczy udowodnić, że układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$ – pozostałe tezy twierdzenia wynikają z Twierdzenia 10.7 i Wniosku 12.13. Oznaczmy

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad \text{dla } j \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{oraz } \alpha_j = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

tak, aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n \mid \beta]$. Układ $\mathcal{U}$ możemy zapisać wektorowo jako

$$\mathcal{U}_w : x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = \beta.$$

Elementy $a_1, \dots, a_n \in F$ są rozwiązaniem układu $\mathcal{U}_w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = \beta$, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ (jako że $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$), czyli gdy $r(A_0) = r(A)$. □

Twierdzenie 12.15. *Niech F będzie ciałem, niech*

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{oraz } \mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

niech ponadto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \text{ oraz } A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

Wówczas układ $\mathcal{U}$ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$.

Dowód. Wcześniej zauważyliśmy (Wniosek 6.9), że układ sprzeczny nie ma rozwiązań, a zatem, wobec twierdzenia Kroneckera-Capelliego, $r(A) \neq r(A_0)$. Pozostaje sprawdzić, że jeśli układ jest niesprzeczny, to $r(A) = r(A_0)$. Załóżmy, że $r(A) \neq r(A_0)$. Niech $\beta_i = [a_{i1} \dots a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, i niech $\beta'_i = [a_{i1} \dots a_{in} \ b_i]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A_0 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \text{ oraz } A = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_m \end{bmatrix}.$$

Niech ponadto

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\}, \text{ oraz } \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

tak, aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n \mid \beta]$. Wówczas:

$\dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m) = r(A_0) = \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) = r(A) = \dim \text{lin}(\beta'_1, \dots, \beta'_m)$, a zatem $r(A_0) < r(A)$. Istnieją zatem liczby naturalne $i_1, \dots, i_s$ takie, że wektory $\beta'_{i_1}, \dots, \beta'_{i_s}$ są liniowo niezależne, a wektory $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_s}$ są liniowo zależne. Tym samym istnieją $a_1, \dots, a_s \in F$ takie, że

$$a_1 \beta'_{i_1} + \dots + a_s \beta'_{i_s} \neq \theta \text{ oraz } a_1 \beta_{i_1} + \dots + a_s \beta_{i_s} = \theta.$$

Tym samym $a_1 \beta'_{i_1} + \dots + a_s \beta'_{i_s} = [0, 0, \dots, 0, a]$, dla pewnego $a \neq 0$. Wobec tego mnożąc i_j -te równanie układu $\mathcal{U}$ przez a_j , dla $j \in \{1, \dots, s\}$, a następnie dodając tak zmodyfikowane równania stronami, otrzymujemy $0 = a$. $\square$