

11. WYKŁAD 11: BAZA I WYMIAR.

Definicja 11.1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Podzbiór $B \subset V$ nazywamy **bazą** przestrzeni V , jeżeli:

- (1) B jest liniowo niezależny,
- (2) B jest generujący, tzn. $\text{lin}(B) = V$.

Przykłady:

- (1) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Q}^n$, lub $\mathbb{R}^n$, lub $\mathbb{C}^n$, lub $\mathbb{Z}_p^n$, lub $GF(p^m)^n$, lub, najogólniej, F^n , gdzie F jest dowolnym ciałem. Niech

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \epsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ jest bazą. Nazywamy ją często **bazą kanoniczną**.

- (2) Rozważmy przestrzeń $M_n^m(F)$ i niech

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$\uparrow$
 j

Wówczas $(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2n}, \dots, \epsilon_{m1}, \dots, \epsilon_{mn})$ jest bazą.

- (3) Rozważmy przestrzeń $F[x]$. Wówczas $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ jest bazą.
- (4) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Wówczas $(1, i)$ jest bazą.

Twierdzenie 11.2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) B jest bazą,
- (2) B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V .

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Załóżmy, że B jest bazą. Przypuśćmy, że istnieje liniowo niezależny podzbiór $B \subsetneq B' \subset V$. Niech $v \in B' \setminus B$. Ponieważ $V = \text{lin}(B)$, więc $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m$, dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$. Wówczas $1 \cdot v - a_1v_1 - \dots - a_mv_m = \theta$ i $1 \neq 0$, a więc B nie jest liniowo niezależny.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Załóżmy, że B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V . Wystarczy pokazać, że B jest generujący. Ustalmy $v \in V$. Jeśli $v \in B$, to $v \in \text{lin}(B)$. Jeśli $v \notin B$, to $B \cup \{v\}$ jest liniowo zależny, a więc $av + a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta$ dla pewnych $a, a_1, \dots, a_m \in F$ oraz $v_1, \dots, v_m \in B$. Ponieważ $v_1, \dots, v_m$ są liniowo niezależne, więc $a \neq 0$. Zatem $v = -\frac{a_1}{a}v_1 - \dots - \frac{a_m}{a}v_m \in \text{lin}(B)$. $\square$

Wniosek 11.3. Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Dowód. Jeżeli $V = \{\theta\}$, to zbiór pusty jest bazą. Jeżeli $V \neq \{\theta\}$, to istnieje $\theta \neq v \in V$ i $A = \{v\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym. W niepustej rodzinie

$$\mathcal{X} = \{B \subset V : A \subset B \text{ i } B \text{ jest liniowo niezależny}\}$$

uporządkowanej przez inkluzję każdy łańcuch ma ograniczenie górne, a więc wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny, który wobec Twierdzenia 11.2 jest bazą. $\square$

Przykład:

- (5) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Z poprzedniego twierdzenia wynika istnieje bazy tej przestrzeni, jakkolwiek wskazanie jej elementów nie jest możliwe. Bazę tę nazywamy **bazą Hamela**.

Twierdzenie 11.4. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) B jest bazą,
- (2) B jest generujący i dla każdego $v \in V$ istnieje dokładnie jedna kombinacja liniowa taka, że

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m,$$

$$\text{dla } a_1, \dots, a_m \in F \text{ i } v_1, \dots, v_m \in B.$$

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Ustalmy $v \neq 0$ i przypuśćmy, że

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = a'_1 v'_1 + \dots + a'_n v'_n$$

dla $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_n \in F$. Wówczas

$$\theta = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m - a'_1 v'_1 - \dots - a'_n v'_n$$

i ponieważ $v \neq \theta$, nie wszystkie a_i, a'_j są równe 0, skąd $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n$ są liniowo zależne. Jest to możliwe, jeśli $n = m$ oraz $v_i = v'_i$.

- (2) $\Rightarrow$ (1) : Przypuśćmy, że B jest liniowo zależny. Wówczas

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

dla pewnych $v, v_1, \dots, v_m \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$. Zatem $v = 1 \cdot v$ oraz $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ są dwiema kombinacjami liniowymi wektorów z B dającymi v . $\square$

Definicja 11.5. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$. Dla $v \in V$ jednoznacznie wyznaczone skalary $a_1, \dots, a_m \in F$ takie, że dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$:*

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

nazywamy **współrzednymi** wektora v w bazie B .

Przykłady:

- (6) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

więc wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ współrzedne $(1, 2, 3)$.

(7) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

więc wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ współrzędne $(2, 1, 0)$.

Lemat 11.6. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$. Jeżeli $v \in \text{lin}(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$ oraz $v \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$, to dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$v_i \in \text{lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n).$$

Dowód. Załóżmy, że $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$, dla pewnych $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$. Zauważmy, że istnieje $a_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$: gdyby $a_1 = \dots = a_m = 0$, to wówczas $v = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$. Wobec tego:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} + \frac{1}{a_i} v - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_m}{a_i} v_m - \frac{b_1}{a_i} w_1 - \dots - \frac{b_n}{a_i} w_n.$$

□

Twierdzenie 11.7 (Lemat Steinitza² o wymianie). Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$. Załóżmy, że $V = \text{lin}(v_1, \dots, v_m)$ oraz że $w_1, \dots, w_n$ są liniowo niezależne. Wówczas:

- (1) $n \leq m$,
- (2) istnieją $i_1, i_2, \dots, i_{m-n}$ takie, że

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$$

Dowód. Dowód prowadzimy indukcyjnie względem n . Dla $n = 0$ nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że jeśli $w_1, \dots, w_n$ są liniowo niezależne, to $n \leq m$ oraz istnieją $i_1, \dots, i_{m-n}$ takie, że $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$. Niech $w_1, \dots, w_{n+1}$ będą liniowo niezależne. Jeśli $n < m$, to $n + 1 \leq m$. Jeśli $n = m$, to wobec założenia indukcyjnego $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$ i stąd $w_{n+1} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$, a więc $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$ nie mogą być liniowo niezależne.

Pozostaje wykazać część (2) twierdzenia. Wobec założenia indukcyjnego:

$$w_{n+1} \in V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}).$$

Ponadto $w_{n+1} \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$. Wobec Lematu 11.6, po ewentualnej zmianie notacji

$$v_{i_{m-n}} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Zauważmy, że ponieważ każdy z wektorów $w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}$ jest kombinacją liniową wektorów $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}$ oraz ponieważ $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$, więc w konsekwencji

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

□

²Ernst Steinitz (1871-1928) urodzony w Laurahütte, dziś część Siemianowic Śląskich.

Wniosek 11.8. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Jeżeli n -elementowy układ jest bazą przestrzeni V , to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.

Dowód. Niech $(w_1, \dots, w_n)$ i $(v_1, \dots, v_m)$ będą bazami. Wówczas układ $(v_1, \dots, v_m)$ jest liniowo niezależny, a $(w_1, \dots, w_n)$ generujący, więc z lematu Steinitza $m \leq n$. Przez symetrię $n \leq m$. $\square$

Definicja 11.9. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni V nazywamy **wymiarem** i oznaczamy $\dim V$. Jeżeli nie istnieje skończona baza danej przestrzeni, przyjmujemy $\dim V = \infty$.

Twierdzenie 11.10. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Wówczas jeżeli $U < V$, to $\dim U \leq n$.

Dowód. Wobec lematu Steinitza każdy liniowo niezależny podzbiór V ma co najwyżej n elementów. Ponadto każdy liniowo niezależny podzbiór U jest liniowo niezależnym podzbiorem V , a więc ma co najwyżej n elementów. W szczególności baza U ma co najwyżej n elementów, a więc $\dim U \leq n$. $\square$

Wniosek 11.11. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $U = V$,
- (2) $\dim U = n$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Jeżeli $U = V$, to oczywiście $\dim U = n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Załóżmy, że $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą U . Bazę tę można uzupełnić do bazy V . Ale baza V będzie miała n elementów, a zatem $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą V . $\square$

Definicja 11.12. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_n \in V$, niech $a_1, \dots, a_n \in F$. Równość postaci

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \theta$$

nazywamy **zależnością** między $v_1, \dots, v_n$. Ciągi współczynników $(a_1, \dots, a_n)$ odpowiadających wszystkim zależnościom między $v_1, \dots, v_n$ tworzą podzbiór przestrzeni F^n oznaczany przez $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ i nazywany **zbiorem zależności** między $v_1, \dots, v_n$.

Twierdzenie 11.13. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_n \in V$. Wówczas zbiór zależności $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ jest podprzestrzenią przestrzeni F^n oraz

$$\dim \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n) = n - \dim \text{lin}(v_1, \dots, v_n).$$

Dowód. Sprawdzenie, że $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ jest podprzestrzenią pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie. Niech $r = \dim \text{lin}(v_1, \dots, v_n)$. Wówczas każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór zbioru $\{v_1, \dots, v_n\}$ składa się z r elementów. Możemy założyć, że $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne. Wówczas

$$v_{r+i} = a_{i1} v_1 + \dots + a_{ir} v_r$$

dla pewnych $a_{i1}, \dots, a_{ir} \in F$, $i \in \{1, \dots, n-r\}$. Pokażemy, że

$$\begin{aligned} & (a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0), \\ & (a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0), \\ & \vdots \\ & (a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \end{aligned}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$. Ponieważ

$$a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r - v_{r+i} = \theta$$

więc $(a_{i1}, \dots, a_{ir}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$. Załóżmy, że

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) &= x_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ &+ x_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &+ x_{n-r}(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1). \end{aligned}$$

W szczególności dla współrzędnej $n-r+i$:

$$-x_i = 0,$$

a więc $x_1 = \dots = x_{n-r} = 0$ i wektory są liniowo niezależne. Ustalmy $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$. Wówczas

$$\begin{aligned} &(a_1, \dots, a_n) + a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ &+ a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &+ a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \\ &= (a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1}, \dots, (a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r}, 0, \dots, 0) \\ &\in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

a zatem

$$(a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1})v_1 + \dots + (a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r})v_r = \theta.$$

Ponieważ $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne, więc

$$a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1} = \dots = a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r} = 0$$

i tym samym

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) &= -a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ &- a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &- a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 11.14. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, U_2 < V$, $\dim U_1 < \infty$, $\dim U_2 < \infty$. Wówczas $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$, $\dim(U_1 + U_2) < \infty$ oraz

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Dowód. Ponieważ $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ oraz $\dim U_1 < \infty$, więc $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$. Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą $U_1 \cap U_2$. Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$ podprzestrzeni U_1 i do bazy $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$ podprzestrzeni U_2 . Oczywiście $\text{lin}(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n, \dots, w_m) = U_1 + U_2$. Pokażemy, że wektory $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n, w_{k+1}, \dots, w_m)$ są liniowo niezależne.

Założmy, że $a_1v_1 + \dots + a_nv_n + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_mw_m = \theta$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n, b_{k+1}, \dots, b_m \in F$. Wówczas

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = -b_{k+1}w_{k+1} - \dots - b_mw_m \in U_2,$$

a więc $a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in U_1 \cap U_2$. Tym samym $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$, a więc $a_1v_1 + \dots + a_kv_k + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_mw_m = \theta$ i skoro $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$ są liniowo niezależne, więc również $a_1 = \dots = a_k = b_{k+1} = \dots = b_m = 0$. $\square$

Wniosek 11.15. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V < \infty$, niech $U_1, U_2 < V$. Wówczas*

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - n$$

gdzie $\dim V = n$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $\dim(U_1 + U_2) \leq n$. $\square$

Definicja 11.16. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V < \infty$. **Hiperpłaszczyzną** nazywamy każdą podprzestrzeń przestrzeni V o wymiarze $n - 1$.*

Twierdzenie 11.17. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$ i niech $\dim U = k$. Wówczas U jest częścią wspólną $n - k$ hiperpłaszczyzn.*

Dowód. Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą U . Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ przestrzeni V . Niech $W_i = \text{lin}(v_1, \dots, v_{k+i-1}, v_{k+i+1}, \dots, v_n)$, $i \in \{1, \dots, n - k\}$. Pokażemy, że $U = W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$.

Oczywiście $U = \text{lin}(v_1, \dots, v_k) \subset W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$. Ustalmy $v \in W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$. Niech $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$. Ustalmy $i \in \{1, \dots, n - k\}$. Wówczas $v \in W_i$, a więc $a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in W_i$. Tym samym $a_{k+i} = 0$. $\square$

Twierdzenie 11.18. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $W_1, \dots, W_l$ będą hiperpłaszczyznami. Wówczas*

$$\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l.$$

Dowód. Dla $l = 1$ nie ma czego dowodzić. Założmy, że $l > 1$ i że dla l hiperpłaszczyzn rezultat jest prawdziwy. Niech $W_1, \dots, W_{l+1}$ będą hiperpłaszczyznami. Wówczas $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l$. Wobec Wniosku 11.15 $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l \cap W_{l+1}) \geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) + n - 1 - n \geq n - l - 1 = n - (l + 1)$. $\square$

Wniosek 11.19. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$ i niech $\dim U = k$. Wówczas U jest częścią wspólną $n - k$, ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn.*