

8. WYKŁAD 8: WYZNACZNIKI.

Definicja 8.1. Niech $A \in M_n(F)$ i niech A_{ij} oznacza macierz powstałą z A przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny. **Wyznacznik** macierz A definiujemy indukcyjnie w oparciu o **rozwiniecie Laplace'a** wzdłuż pierwszego wiersza macierzy A :

- $\det([a_{11}]) = a_{11}$;
- $\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} \det(A_{1n})$.

Zamiast $\det(A)$ piszemy też $|A|$. Pojawiające się w definicji wyznaczniki $\det(A_{ij})$ nazywamy **minorami** macierzy A .

Przykład:

- (1) Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Wówczas:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- (2) Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Wówczas:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Wzór ten stosunkowo łatwo jest zapamiętać stosując **schemat Sarrusa**: powiększamy macierz A jeszcze raz przepisując jej dwie pierwsze kolumny:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

a następnie dodajemy do siebie iloczyny wszystkich trójek czynników leżących na przekątnych biegnących z lewego górnego do prawego dolnego rogu oraz odejmujemy iloczyny trójek z przekątnych biegnących od prawego górnego rogu do lewego dolnego:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

i w rezultacie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Widzimy, że obliczanie wyznaczników wprost z definicji jest mało ekonomiczne z obliczeniowego punktu widzenia: obliczenie wyznacznika macierzy stopnia 3 wymaga obliczenia 3 wyznaczników macierzy stopnia 2, obliczenie macierzy stopnia 4 wymaga obliczenia 4 wyznaczników macierzy stopnia 3, a zatem 12 wyznaczników macierzy stopnia 2 itd. W praktyce wyznaczniki obliczamy stosując odpowiednie operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy.

Twierdzenie 8.2 (o wyznaczniku macierzy trójkątnej). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ będzie macierzą trójkątną, a zatem taką, że $a_{ij} = 0$, gdy $i < j$. Wówczas

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n . Dla $n = 1$ teza jest oczywista, założmy więc, że $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ jest macierzą trójkątną i że wyznacznik każdej macierzy trójkątnej stopnia $n - 1 \geq 1$ równy jest iloczynowi współrzędnych na głównej przekątnej. Wówczas:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} - 0 \cdot \det(A_{12}) + \dots + (-1)^{n+1} 0 \cdot \det(A_{1n}) \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \end{aligned}$$

wobec założenia indukcyjnego. $\square$

Twierdzenie 8.3 (o wyznaczniku macierzy klatkowej). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$, $B = [b_{ij}] \in M_m^m(F)$, $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$ i $D = [d_{ij}] \in M_n^m(F)$. Niech ponadto*

$$E = \left[\frac{A}{D} \middle| \frac{C}{B} \right] = [e_{ij}], \text{ gdzie } e_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{gdy } i \leq n, j \leq n, \\ c_{i,j-n}, & \text{gdy } i \leq n, j > n, \\ d_{i-n,j}, & \text{gdy } i > n, j \leq n, \\ b_{i-n,j-n}, & \text{gdy } i > n, j > n. \end{cases}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left| \frac{A}{D} \middle| \frac{\Theta}{B} \right| = \det(A) \cdot \det(B), \\ (2) \quad & \left| \frac{A}{D} \middle| \frac{C}{\Theta} \right| = (-1)^{mn} \det(C) \cdot \det(D). \end{aligned}$$

Dowód. Udowodnimy część (1), dowód części (2) jest analogiczny i pozostawimy go jako ćwiczenie. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n . Dla $n = 1$ i dowolnego m :

$$\left| \frac{A}{D} \middle| \frac{\Theta}{B} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{11} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,m-1} & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{m,m-1} & b_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Założmy, że dowodzony rezultat jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej m oraz $n - 1 \geq 1$. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$, $B = [b_{ij}] \in M_m^m(F)$, $D = [d_{ij}] \in M_n^m(F)$ i niech D_j oznacza macierz powstałą z D przez wykreślenie j -tej kolumny. Wówczas:

$$\left| \frac{A}{D} \middle| \frac{\Theta}{B} \right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \left| \frac{A_{1j}}{D_j} \middle| \frac{\Theta}{B} \right|.$$

Ponieważ A_{1j} jest macierzą stopnia $n - 1$, więc wobec założenia indukcyjnego:

$$\left| \frac{A_{1j}}{D_j} \middle| \frac{\Theta}{B} \right| = \det(A_{1j}) \det(B),$$

a stąd:

$$\begin{aligned} \left| \frac{A}{D} \middle| \frac{\Theta}{B} \right| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \left| \frac{A_{1j}}{D_j} \middle| \frac{\Theta}{B} \right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \det(B) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \right) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 8.4 (o wyznaczniku macierzy transponowanej). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ i niech $A^T = [b_{ij}] \in M_n(F)$ będzie macierzą **transponowaną** do A , czyli zdefiniowaną wzorem $b_{ij} = a_{ji}$. Wówczas*

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n . Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, gdyż wówczas $A = A^T$. Dla $n = 2$ twierdzenie wynika wprost ze wzrów podanych w Przykładzie (1). Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1 \geq 2$. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$, niech $A_{i,k;j,l}$ oznacza macierz powstałą z A przez wykreślenie wierszy o wskaźnikach i oraz k , a następnie kolumn o wskaźnikach j oraz l . Wówczas:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) &= \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}^T) \\ &= \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \left(\sum_{i=2}^n (-1)^{2+i} a_{i1} \det(A_{1,i;1,j}) \right) = \sum_{i,j=2}^n (-1)^{i+j+1} a_{1j} a_{i1} \det(A_{1,i;1,j}). \end{aligned}$$

Podobnie:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n (-1)^{1+i} a_{i1} \det((A^T)_{1i}) &= \sum_{i=2}^n (-1)^{1+i} a_{i1} \det(A_{i1}) \\ &= \sum_{i=2}^n (-1)^{1+i} a_{i1} \left(\sum_{j=2}^n (-1)^{2+j} a_{1j} \det(A_{1,i;1,j}) \right) = \sum_{i,j=2}^n (-1)^{i+j+1} a_{1j} a_{i1} \det(A_{1,i;1,j}). \end{aligned}$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) = \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + a_{11} \det(A_{11}) \\ &= \sum_{i=2}^n (-1)^{1+i} a_{i1} \det((A^T)_{1i}) + a_{11} \det((A^T)_{11}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{i1} \det((A^T)_{1i}) = \det(A^T). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 8.5 (o liniowości wyznacznika). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$. Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby*

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Niech ponadto $\lambda, \mu \in F$ oraz $\beta'_i = [a'_{i1} \ \dots \ a'_{in}]$. Wówczas

$$\det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \lambda\beta_i + \mu\beta'_i \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) = \lambda \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta_i \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) + \mu \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta'_i \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right)$$

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n . Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wyznaczników macierzy stopnia $n - 1 \geq 1$. Jeżeli $i > 1$, to teza wynika wprost z założenia indukcyjnego i definicji wyznacznika. Załóżmy więc, że $i = 1$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} \lambda\beta_1 + \mu\beta'_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} (\lambda a_{1j} + \mu a'_{1j}) \det(A_{1j}) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \mu \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a'_{1j} \det(A_{1j}), \end{aligned}$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} \lambda\beta_1 + \mu\beta'_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$. Ponieważ $A_{1j} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{1j}$ oraz $A_{1j} = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{1j}$ więc

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) = \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) \text{ oraz } \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a'_{1j} \det(A_{1j}) = \det \left(\begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right)$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 8.6. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$. Oznaczmy:

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$. Niech ponadto $\lambda, \mu \in F$ oraz

$$\alpha'_j = \begin{bmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{bmatrix}.$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} \det \left(\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_{j-1} & \lambda\alpha_j + \mu\alpha'_j & \alpha_{j+1} & \dots & \alpha_n \end{array} \right] \right) \\ = \lambda \det \left(\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_{j-1} & \alpha_j & \alpha_{j+1} & \dots & \alpha_n \end{array} \right] \right) + \mu \det \left(\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_{j-1} & \alpha'_j & \alpha_{j+1} & \dots & \alpha_n \end{array} \right] \right). \end{aligned}$$

Dowód wynika wprost z Twierdzeń 8.4 i 8.5.

Wniosek 8.7 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 2). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$.*

- (1) *Jeżeli w macierzy A pomnożymy i -ty wiersz przez $\lambda \in F$, to wyznacznik $\det(A)$ również należy pomnożyć przez $\lambda \in F$.*
- (2) *Jeżeli w macierzy A pomnożymy j -tą kolumnę przez $\lambda \in F$, to wyznacznik $\det(A)$ również należy pomnożyć przez $\lambda \in F$.*

Twierdzenie 8.8. *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \dots a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby*

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right].$$

Jeżeli $\beta_i = \beta_k$, dla pewnych $i, k \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq k$, to wówczas $\det(A) = 0$.

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że $i < k$. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n . Jeżeli $n = 2$, to $i = 1$ oraz $k = 2$ i dowodzony wzór wynika wprost ze wzoru na wyznacznik macierzy stopnia 2. Założymy, że twierdzenie jest prawdziwe dla macierzy stopnia $n - 1 \geq 2$. Jeżeli $i > 1$ to teza wynika wprost z założenia indukcyjnego i definicji wyznacznika. Założymy więc, że $i = 1$. Możemy również założyć, że $k = 2$, jeżeli bowiem $k > 2$, to na mocy udowodnionej już części twierdzenia:

$$\det \left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 + \beta_k \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_2 + \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right] \right) = 0, \det \left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_2 \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right] \right) = 0 \text{ oraz } \det \left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right] \right) = 0.$$

Wobec Twierdzenia 8.5:

$$\det \left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 + \beta_k \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_2 + \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right] \right) = \det \left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_2 \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right] \right) + \det \left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right] \right) + \det \left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_2 \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right] \right) + \det \left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right] \right),$$

skąd

$$\det(A) = -\det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix} \right)$$

i tym samym wystarczy rozważać przypadek $i = 1$ oraz $k = 2$. Oznaczmy przez $A_{1,2;st}$ macierz powstałą z A przez skreślenie dwóch pierwszych wierszy oraz kolumn o wskaźnikach s i t . Wówczas:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \left[\left(\sum_{s=1}^{j-1} (-1)^{1+s} a_{2s} \det(A_{1,2;s,j}) \right) + \left(\sum_{s=j+1}^n (-1)^s a_{2s} \det(A_{1,2;j,s}) \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \left[\left(\sum_{s=1}^{j-1} (-1)^{1+s} a_{1s} \det(A_{1,2;s,j}) \right) + \left(\sum_{s=j+1}^n (-1)^s a_{1s} \det(A_{1,2;j,s}) \right) \right] \\ &= a_{11}a_{12} \det(A_{1,2;1,2}) - a_{11}a_{13} \det(A_{1,2;1,3}) + a_{11}a_{14} \det(A_{1,2;1,4}) + \dots + (-1)^n a_{11}a_{1n} \det(A_{1,2;1,n}) \\ &\quad - a_{12}a_{11} \det(A_{1,2;1,2}) + a_{12}a_{13} \det(A_{1,2;1,3}) - a_{12}a_{14} \det(A_{1,2;1,4}) + \dots + (-1)^n a_{12}a_{1n} \det(A_{1,2;2,n}) \\ &\quad + a_{13}a_{11} \det(A_{1,2;1,3}) - a_{13}a_{12} \det(A_{1,2;1,3}) + a_{13}a_{14} \det(A_{1,2;3,4}) + \dots + (-1)^n a_{13}a_{1n} \det(A_{1,2;3,n}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n a_{1n}a_{11} \det(A_{1,2;1,n}) - (-1)^n a_{1n}a_{12} \det(A_{1,2;2,n}) + \dots + a_{1n}a_{1,n-1} \det(A_{1,2;n-1,n}) = 0, \end{aligned}$$

co łatwo zauważyć dodając do siebie kolejne wyrazy pierwszego “wiersza” i pierwszej “kolumny” w powyższej tablicy dodawań, następnie kolejne (poza pierwszymi) wyrazy drugiego “wiersza” i drugiej “kolumny”, następnie kolejne (poza pierwszymi i drugimi) wyrazy trzeciego “wiersza” i trzeciej “kolumny” itd. $\square$

Wniosek 8.9. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy:

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$. Jeżeli $\alpha_i = \alpha_k$, dla pewnych $i, k \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq k$, to wówczas $\det(A) = 0$.

Dowód wynika wprost z Twierdzeń 8.4 i 8.8.

Wniosek 8.10 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 1). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$.*

Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby $A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$. Wówczas

$$\det(A) = -\det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta_k \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_i \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right).$$

Dowód. Rozważmy macierz $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta_i + \beta_k \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_i + \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$. Wobec Twierdzenia 8.5 $\det(B) = 0$. Ponadto:

$$\det B = \det(A) + \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta_k \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_i \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) + \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta_k \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) + \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta_i \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_i \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) = \det(A) + \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta_k \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_i \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right),$$

skąd otrzymujemy tezę. $\square$

Wniosek 8.11 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 1). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy:*

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$. Wówczas

$$\det(A) = -\det([\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_{i-1} \mid \alpha_k \mid \alpha_{i+1} \mid \dots \mid \alpha_{k-1} \mid \alpha_i \mid \alpha_{k+1} \mid \dots \mid \alpha_n]).$$

Dowód wynika wprost z Twierdzenia 8.4 i Wniosku 8.10.

Wniosek 8.12 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 3). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby*

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Niech $\lambda \in F$. Wówczas:

$$\det(A) = \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_k + \lambda \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right).$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że:

$$\det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_k + \lambda \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) + \lambda \det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) = \det(A).$$

□

Wniosek 8.13 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 3). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy:*

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$. Wówczas $\det(A) = -\det([\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_i \mid \dots \mid \alpha_k + \lambda \alpha_i \mid \dots \mid \alpha_n])$.

Dowód wynika wprost z Twierdzenia 8.4 i Wniosku 8.12.

Przykłady:

- (3) Twierdzenie 8.2 wraz z Wnioskami 8.7, 8.10, 8.11, 8.12 i 8.13 dają praktyczną metodę obliczania wyznaczników: najpierw sprowadzamy daną macierz przez ciąg operacji elementarnych do macierzy trójkątnej, a następnie mnożymy wyrazy na głównej przekątnej. Dla przykładu obliczymy wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mamy kolejno:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 7w_1 \\ w_4 - w_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_2 : (-2) \\ k_2 - k_1 & k_3 - 2k_1 & k_4 - k_1 \end{matrix} \\ &= (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_3 + w_2 \\ w_3 \downarrow \\ w_4 \uparrow \end{matrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} k_3 - k_2 & k_4 + k_2 \end{matrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_4 + 13w_3 \end{matrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 30 = 60 \end{aligned}$$

Wniosek 8.14. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$. Wówczas $\det(A) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest elementarnie równoważna macierzy I_n .

Dowód wynika wprost z Twierdzenia 8.2 wraz z Wnioskami 8.7, 8.10, 8.11, 8.12 i 8.13.

Podamy teraz trzy ważne rezultaty teoretyczne: uogólnienie drugiej części definicji wyznacznika (twierdzenie Laplace'a), związek z układami równań (twierdzenie Cramera) i związek z mnożeniem macierzy (twierdzenie Cauchy'ego).

Twierdzenie 8.15 (rozwiniecie Laplace'a). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ i niech A_{ij} oznacza macierz powstałą z A przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny. Wówczas

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ dla dowolnych } i \in \{1, \dots, n\}, \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ dla dowolnych } j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Dowód. Udowodnimy pierwszą część twierdzenia, dowód drugiej części będzie wynikał wprost z Twierdzenia 8.4. Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Jeśli $i = 1$ to teza twierdzenia wynika wprost z definicji wyznacznika. Załóżmy, że $i \neq 1$. Niech:

$$A' = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \\ \beta_{i+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A_{ij} = A'_{1j}$ oraz, stosując kolejno $i - 1$ razy Wniosek 8.10, $\det(A') = (-1)^{i-1} \det(A)$. Stąd:

$$\det(A) = (-1)^{i-1} \det(A') = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{ij} \det(A'_{1j}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

□

Twierdzenie 8.16 (wzory Cramera). *Rozważmy układ równań:*

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ będzie macierzą współczynników lewych stron równań układu $\mathcal{U}$ i oznaczmy przez A_j macierz powstałą z A przez zastąpienie j -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Wówczas układ $\mathcal{U}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$ i wyraża się ono wzorami

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Dowód. Wobec Wniosku 8.14 wyznacznik $\det(A) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest elementarnie równoważna macierzy I_n , a to z kolei ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy układ $\mathcal{U}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Pozostaje udowodnić, że

$$a_{i1} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} + a_{i2} \frac{\det(A_2)}{\det(A)} + \dots + a_{in} \frac{\det(A_n)}{\det(A)} = b_i,$$

dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Wobec wzorów Laplace'a $\det(A_j) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} b_i \det(A_{ij})$, dla $j \in \{1, \dots, n\}$, a wobec tego

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \det(A_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} b_i \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \right) = c_i \det(A).$$

□

Twierdzenie 8.17 (Cauchy'ego). *Niech $A, B \in M_n^n(F)$. Wówczas $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.*

Dowód. Niech

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline -I_n & B \end{array} \right].$$

Wobec twierdzenia o wyznaczniku macierzy klatkowej, $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$. Niech C' oznacza macierz powstałą przez dodanie do $(n+j)$ -tej kolumny macierzy C , dla $j \in \{1, \dots, n\}$, kolumnę pierwszą pomnożoną przez b_{1j} , kolumnę drugą pomnożoną przez b_{2j} , ..., kolumnę n -tą pomnożoną przez b_{nj} . Wówczas $\det(C) = \det(C')$ i łatwo spostrzec, że

$$C' = \left[\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -I_n & \Theta \end{array} \right].$$

Z drugiej strony

$$\det(C') = (-1)^{n^2} \det(AB) \det(-I) = (-1)^{n^2} (-1)^n \det(AB) = \det(AB),$$

gdyż dla dowolnej liczby całkowitej $n^2 + n$ jest liczbą parzystą.

□