

7. WYKŁAD 7: ALGEBRA MACIERZY.

Definicja 7.1. **Macierzą** nad ciałem F nazywamy prostokątną tablicę elementów ciała F .

Zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ oznaczamy $M_m^n(F)$.

Napis $A = [a_{ij}]$ oznacza, że macierz A składa się z takich elementów, że w i -tym wierszu i j -tej kolumnie znajduje się a_{ij} .

Macierze A i B są **równe**, gdy $A, B \in M_m^n(F)$ i jeśli $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, to $a_{ij} = b_{ij}$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Sumę macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$, $A, B \in M_m^n(F)$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Iloczyn macierzy $A = [a_{ij}]$, $A \in M_m^n(F)$, przez **skalar** $\lambda \in F$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = \lambda \times a_{ij}$.

Macierz zerową Θ definiujemy jako $\Theta = [0]$.

Uwaga 7.2. W szczególności zauważmy, że dodawanie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy, a mnożenie przez skalar jest działaniem zewnętrznym.

Przykłady:

(1) Wprost z definicji dodawania macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

(2) Dodawanie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

(3) Wprost z definicji mnożenia macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$ przez skalar z ciała $\mathbb{R}$:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 7.3. Niech F będzie ciałem, niech $A, B, C \in M_m^n(F)$, niech $\lambda, \mu \in F$. Wówczas:

- (1) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- (2) $A + B = B + A$,
- (3) $\Theta + A = A$,
- (4) $A + (-A) = \Theta$,
- (5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- (6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
- (7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- (8) $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \Theta$,
- (9) jeśli $\lambda A = \Theta$, to $\lambda = 0$ lub $A = \Theta$.

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Uwaga 7.4. W szczególności zauważamy, że $(M_m^n(F), +)$ jest grupą przemenną, w której elementem neutralnym jest Θ , a element przeciwny do A to $-A$.

Definicja 7.5. Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{jk}]$, gdzie $A \in M_m^n(F)$, $B \in M_p^m(F)$, nazywamy macierz $C = [c_{ik}]$, $C \in M_p^n(F)$, daną wzorem

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Oznaczamy $C = A \cdot B$.

Przykłady:

(4) Wprost z definicji mnożenia macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

(5) Mnożenie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

(6) Mnożenie nie jest też przemienne:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

ale

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}.$$

(7) W algebrze macierzy z działaniem mnożenia istnieją dzielniki zera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 7.6. (1) $(AB)C = A(BC)$, dla $A \in M_n^m(F)$, $B \in M_p^n(F)$, $C \in M_q^p(F)$.

(2) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, dla $A \in M_n^m(F)$, $B \in M_p^n(F)$, $\lambda \in F$.

(3) $(A+B)C = AC + BC$, dla $A, B \in M_n^m(F)$, $C \in M_p^n(F)$.

(4) $D(A+B) = DA + DB$, dla $A, B \in M_n^m(F)$, $D \in M_m^p(F)$.

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Definicja 7.7. Macierz $I_n = [\delta_{ij}] \in M_n^n(F)$, gdzie

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

nazywamy **macierzą identycznościową**. Macierz $A \in M_n^n(F)$ nazywamy **odwracalną** (lub **niesobliwą**), jeżeli istnieje macierz $B \in M_n^n(F)$ taka, że

$$AB = BA = I_n.$$

Macierz B nazywamy wówczas **macierzą odwrotną** do A i oznaczamy A^{-1} .

Wniosek 7.8. W szczególności zauważamy, że $(M_n^n(F), +, \cdot)$ jest pierścieniem z jedynką, który nie musi być przemienny.

Wniosek 7.9. (1) Macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie.

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, dla $A, B \in M_n^n(F)$.

(3) $AI_n = I_nA = A$, dla $A \in M_n^n(F)$.

(4) $(A^{-1})^{-1} = A$.

Twierdzenie 7.10. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2^2(F)$ i niech $\Delta = ad - bc \neq 0$. Wówczas A jest niesobliwa oraz

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Dowód. Bezpośrednio sprawdzamy, że

$$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Definicja 7.11. Macierzami elementarnymi nazywamy macierze:

- (1) $E_{ij} \in M_n^n(F)$, powstałe z I_n przez zamianę miejscami i -tego i j -tego wiersza;
- (2) $E_i(\lambda) \in M_n^n(F)$, powstałe z I_n przez pomnożenie i -tego wiersza przez $\lambda \in F$;
- (3) $E_{ij}(\lambda) \in M_n^n(F)$, powstałe z I_n przez dodanie do i -tego wiersza j -tego wiersza pomnożonego przez $\lambda \in F$.

Operacjami elementarnymi na macierzy $A \in M_n^n(F)$ nazywamy operacje polegające na:

- (1) zamianie miejscami i -tego i j -tego wiersza;
- (2) pomnożeniu i -tego wiersza przez $\lambda \in F$;
- (3) dodaniu do i -tego wiersza j -tego wiersza pomnożonego przez $\lambda \in F$.

Przykład:

- (8) Sprawdzamy, że na przykład:

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{23}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Możemy też powiedzieć, że każda z powyższych macierzy powstała z I_3 przez zastosowanie odpowiedniej operacji elementarnej.

Twierdzenie 7.12. Macierz $E \cdot A$, gdzie $A \in M_n^n(F)$, $E \in \{E_{ij}, E_i(\lambda), E_{ij}(\lambda)\} \subset M_n^n(F)$, powstaje z macierzy A przez wykonanie odpowiedniej operacji elementarnej.

Dowód. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Pokażemy, dla przykładu, że macierz $E_{ij} \cdot A$ powstaje z A przez zamienienie miejscami i -tego i j -tego wiersza. Istotnie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

□

Przykład:

- (9) Sprawdzamy, na przykład, iż:

$$E_{23} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Wniosek 7.13. *Macierze elementarne są nieosobliwe oraz*

- (1) $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$,
- (2) $E_i^{-1}(\lambda) = E_i(\frac{1}{\lambda})$,
- (3) $E_{ij}^{-1}(\lambda) = E_{ij}(-\lambda)$.

Dowód. Wystarczy w poprzednim twierdzeniu w roli A wziąć E_{ij} , $E_i(\lambda)$ i $E_{ij}(\lambda)$, odpowiednio. $\square$

Definicja 7.14. *Macierze A i B , $A, B \in M_n^n(F)$, są wierszowo równoważne, jeśli B można otrzymać z A przez ciąg operacji elementarnych na wierszach.*

Uwaga 7.15. *Macierze A i B , $A, B \in M_n^n(F)$, są wierszowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze elementarne $E_1, \dots, E_r$ takie, że*

$$B = E_r \cdot E_{r-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A.$$

Twierdzenie 7.16. *Niech A będzie macierzą nieosobliwą, $A \in M_n^n(F)$. Wówczas:*

- (1) *A jest wierszowo równoważna macierzy I_n ,*
- (2) *A jest iloczynem macierzy elementarnych*

Dowód. Wobec poprzedniej uwagi wystarczy oczywiście udowodnić tylko pierwszą część twierdzenia. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ i założmy, że istnieje macierz A^{-1} , a zatem taka, że $A^{-1} \cdot A = I_n$. Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

lub, równoważnie, używając notacji macierzowej:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ jest jednym z rozwiązań układu $\mathcal{U}$. Zauważmy, że w istocie jest to jedyne rozwiązanie, jeśli bowiem $x_1, \dots, x_n \in F$ jest dowolnym rozwiązaniem, to wówczas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I_n \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

czyli $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Tym samym układ $\mathcal{U}$ po sprowadzeniu do postaci diagonalnej przybiera formę

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ale sprowadzenie układu do postaci diagonalnej polega na wykonaniu ciągu operacji elementarnych na wierszach macierzy A , udowodniliśmy zatem, że A jest wierszowo równoważna z I_n . $\square$

Twierdzenie 7.17. *Niech $A \in M_n(F)$ będzie wierszowo równoważna macierzy I_n (lub, równoważnie, niech będzie iloczynem macierzy elementarnych). Wówczas A jest nieosobliwa i macierz A^{-1} może być wyznaczona przez wykonanie tego samego ciągu operacji elementarnych na I_n , jakie zostały wykonane na A aby otrzymać I_n .*

Dowód. Niech $A = E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_r$. Ponieważ każda z macierzy $E_1, E_2, \dots, E_r$ jest nieosobliwa, więc istnieją macierze $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \dots, E_r^{-1}$ oraz:

$$E_r^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} E_1 E_2 \dots E_r = I_n.$$

Jednocześnie równość $E_r^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \cdot A = I_n$ oznacza, że macierz I_n otrzymujemy przez kolejne zastosowanie operacji elementarnych odpowiadających macierzom $E_r^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ na macierzy A , zaś równość $A^{-1} = E_r^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \cdot I_n$ oznacza, że macierz A^{-1} otrzymujemy przez kolejne zastosowanie operacji elementarnych odpowiadających macierzom $E_r^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ na macierzy I_n . $\square$

Przykład:

(10) Ostatnie twierdzenie dostarcza praktycznej metody wyznaczania macierzy odwrotnych. Przykładowo wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Praktycznie jest “powiększyć” rozważaną macierz o macierz I_2 i wykonywać wszystkie operacje elementarne równocześnie na obydwu macierzach, sprowadzając macierz A do macierzy I_2 i jednocześnie macierz I_2 do macierzy A^{-1} :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad w_2 - w_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad w_2 \cdot (-1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad w_2 - w_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad w_1 - 2w_2$$

a zatem $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. Sprawdzamy, że wynik ten zgadza się z Twierdzeniem 7.10.