

6. WYKŁAD 6: UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH.

Definicja 6.1. Niech F będzie ciałem. **Układem m równań liniowych** o niewiadomych $x_1, \dots, x_n$, $m, n \in \mathbb{N}$, o współczynnikach z ciała F nazywamy układ równań postaci:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_j \in F$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Definicja 6.2. Niech F będzie ciałem. Wielomian $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ nazywamy **formą stopnia m** , gdy jest sumą jednomianów stopnia m lub wielomianem zerowym. Zbiór form stopnia m z pierścienia $F[x_1, \dots, x_n]$ będziemy oznaczali przez $F_h[x_1, \dots, x_n]_m$. Formy stopnia 1 będziemy nazywali **formami liniowymi**. Formy stopnia 2 będziemy nazywaliśmy **formami kwadratowymi**.

Uwaga 6.3. Niech F będzie ciałem, niech $\mathcal{U}$ będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z F . Lewe strony równań należących do $\mathcal{U}$ są formami liniowymi ze zbioru $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, a prawe elementami ciała F .

Definicja 6.4. Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} l_1 = b_1 \\ l_2 = b_2 \\ \vdots \\ l_m = b_m \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych, $l_1, \dots, l_m \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, $b_1, \dots, b_m \in F$. Każde równanie liniowe:

$$a_1l_1 + a_2l_2 + \dots + a_m l_m = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_m b_m,$$

gdzie $a_1, \dots, a_m \in F$, nazywamy **kombinacją liniową** równań danego układu. **Rozwiązaniem** układu $\mathcal{U}$ nazywamy każdy taki ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ elementów ciała F , że

$$l_i(a_1, \dots, a_n) = b_i,$$

dla $i \in \{1, \dots, m\}$.

Uwaga 6.5. Każde rozwiązanie układu równań liniowych jest rozwiązaniem każdego równania będącego kombinacją liniową równań tego układu.

Definicja 6.6. Dwa układy równań $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ nazywamy **równoważnymi** gdy każde równanie układu $\mathcal{U}_1$ jest kombinacją liniową równań układu $\mathcal{U}_2$ i vice versa.

Uwaga 6.7. Równoważne układy równań mają identyczne zbiory rozwiązań.

Definicja 6.8. Układ równań nazywamy **sprzecznym** gdy równanie $0 = 1$ jest kombinacją liniową równań tego układu.

Wniosek 6.9. Spreczny układ równań nie ma rozwiązań.

Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Podamy metodę rozwiązywania tego układu przez **eliminację Gaussa**.

Etap I: sprowadzenie do **postaci trójkątnej**.

Wybieramy równanie i niewiadomą o niezerowym współczynniku i nazywamy ją **niewiadomą bazową** 1 kroku. Załóżmy, że jest nią x_1 ze współczynnikiem $a_{11} \neq 0$. Mnożymy wybrane równanie (u nas równanie pierwsze) przez $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i odejmujemy od drugiego równania. Postępując indukcyjnie mnożymy wybrane równanie przez $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ i odejmujemy od i -tego równania, $i \in \{2, \dots, m\}$. Następnie przechodzimy do kroku 2, w którym wybieramy równanie spośród $i \in \{2, \dots, m\}$, niewiadomą bazową drugiego kroku i powtarzamy procedurę dla równań $i \in \{3, \dots, m\}$. Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \widetilde{a}_{22}x_2 + \widetilde{a}_{23}x_3 + \dots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \widetilde{a}_{rr}x_r + \dots + \widetilde{a}_{rn}x_n = \widetilde{b}_r. \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_r$ zostały wybrane jako niewiadome bazowe, a $x_{r+1}, \dots, x_n$ pozostają jako **parametry**.

Etap II: sprowadzenie do **postaci diagonalnej**.

W ostatnim równaniu (u nas r) wybieramy niewiadomą bazową, powiedzmy x_r , i eliminujemy z równań $i \in \{1, \dots, r-1\}$ odejmując równanie r od i po wcześniejszym pomnożeniu przez $\frac{\widetilde{a}_{ir}}{\widetilde{a}_{rr}}$. Następnie postępujemy indukcyjnie z równaniami $i \in \{1, \dots, r-2\}$. Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \overline{a}_{1,r+1}x_{r+1} + \overline{a}_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1 \\ \quad \widetilde{a}_{22}x_2 + \overline{a}_{2,r+1}x_{r+1} + \overline{a}_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \widetilde{a}_{rr}x_r + \overline{a}_{r,r+1}x_{r+1} + \overline{a}_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + \overline{a}_{rn}x_n = \overline{b}_r. \end{cases}$$

Etap III: zapisujemy rozwiązanie przenosząc parametry na prawą stronę i dzieląc przez współczynniki przy $x_1, \dots, x_r$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\overline{b}_1}{a_{11}} - \frac{\overline{a}_{1,r+1}}{a_{11}}x_{r+1} - \dots - \frac{\overline{a}_{1n}}{a_{11}}x_n \\ x_2 = \frac{\overline{b}_2}{a_{22}} - \frac{\overline{a}_{2,r+1}}{a_{22}}x_{r+1} - \dots - \frac{\overline{a}_{2n}}{a_{22}}x_n \\ \quad \quad \quad \vdots \\ x_r = \frac{\widetilde{b}_r}{a_{rr}} - \frac{\widetilde{a}_{r,r+1}}{a_{rr}}x_{r+1} - \dots - \frac{\widetilde{a}_{rn}}{a_{rr}}x_n. \end{cases}$$

Przykład:

(1) Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{Q}$.

Uwaga 6.10. *Chcąc zaoszczędzić czas układy równań zapisujemy jako **macierze**, czyli prostokątne tabliczki liczb, które są odpowiednimi współczynnikami w odpowiednich równaniach.*

Przykład:

(2) Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x + 4y + 2z + 5t = 0 \\ 2x + y + z + 4t = 0 \\ 3x + 5y + 3z + 2t = 0 \\ x + 4y + 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_7$.