

Baza i wymiar.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Podzbiór $B \subset V$ nazywamy **bazą** przestrzeni V , jeżeli:

1. B jest liniowo niezależny,
2. B jest generujący, tzn. $\text{lin}(B) = V$.

Przykłady:

1. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Q}^n$, lub $\mathbb{R}^n$, lub $\mathbb{C}^n$, lub $\mathbb{Z}_p^n$, lub $GF(p^m)^n$, lub, najogólniej, F^n , gdzie F jest dowolnym ciałem. Niech

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \epsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ jest bazą. Nazywamy ją często **bazą kanoniczną**.

2. Rozważmy przestrzeń $M_n^m(F)$ i niech

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} .$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ j \end{matrix}$

Wówczas $(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2n}, \dots, \epsilon_{m1}, \dots, \epsilon_{mn})$ jest bazą.

3. Rozważmy przestrzeń $F[x]$. Wówczas $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ jest bazą.
4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Wówczas $(1, i)$ jest bazą.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$.
Następujące warunki są równoważne:

1. B jest bazą,
2. B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V .

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (2) :

Założmy, że B jest bazą.

Przypuśćmy, że istnieje liniowo niezależny podzbiór $B \subsetneq B' \subset V$.

Niech $v \in B' \setminus B$.

Ponieważ $V = \text{lin}(B)$, więc $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m$, dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$.

Wówczas $1 \cdot v - a_1 v_1 - \dots - a_m v_m = \theta$ i $1 \neq 0$, a więc B nie jest liniowo niezależny.

(2) $\Rightarrow$ (1) :

Założmy, że B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V .

Wystarczy pokazać, że B jest generujący. Ustalmy $v \in V$. Jeśli $v \in B$, to $v \in \text{lin}(B)$.

Jeśli $v \notin B$, to $B \cup \{v\}$ jest liniowo zależny, a więc

$av + a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta$ dla pewnych $a, a_1, \dots, a_m \in F$ oraz $v_1, \dots, v_m \in B$.

Ponieważ $v_1, \dots, v_m$ są liniowo niezależne, więc $a \neq 0$.

Zatem $v = -\frac{a_1}{a}v_1 - \dots - \frac{a_m}{a}v_m \in \text{lin}(B)$.

Wniosek

Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Dowód.

Jeżeli $V = \{\theta\}$, to zbiór pusty jest bazą.

Jeżeli $V \neq \{\theta\}$, to istnieje $\theta \neq v \in V$ i $A = \{v\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

W niepustej rodzinie

$$\mathcal{X} = \{B \subset V : A \subset B \text{ i } B \text{ jest liniowo niezależny}\}$$

uporządkowanej przez inkluzję każdy łańcuch ma ograniczenie górne, a więc wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny, który wobec poprzedniego twierdzenia jest bazą. $\square$

Przykład:

5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Z poprzedniego twierdzenia wynika istnienie bazy tej przestrzeni, jakkolwiek wskazanie jej elementów nie jest możliwe. Bazę tę nazywamy **bazą Hamela**.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$.
Następujące warunki są równoważne:

1. B jest bazą,
2. B jest generujący i dla każdego $v \in V$ istnieje dokładnie jedna kombinacja liniowa taka, że

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m,$$

dla $a_1, \dots, a_m \in F$ i $v_1, \dots, v_m \in B$.

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (2) :

Ustalmy $v \neq 0$ i przypuśćmy, że

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = a'_1 v'_1 + \dots + a'_n v'_n$$

dla $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_n \in F$.

Wówczas

$$\theta = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m - a'_1 v'_1 - \dots - a'_n v'_n$$

i ponieważ $v \neq \theta$, nie wszystkie a_i, a'_j są równe 0, skąd

$v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n$ są liniowo zależne.

Jest to możliwe, jeśli $n = m$ oraz $v_i = v'_i$.

(2) $\Rightarrow$ (1) :

Przypuśćmy, że B jest liniowo zależny.

Wówczas

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

dla pewnych $v, v_1, \dots, v_m \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$. Zatem $v = 1 \cdot v$ oraz $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ są dwiema kombinacjami liniowymi wektorów z B dającymi v .

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$.
Dla $v \in V$ jednoznacznie wyznaczone skalary $a_1, \dots, a_m \in F$ takie,
że dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

nazywamy **współrzednymi** wektora v w bazie B .

Przykłady:

6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

więc wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ współrzędne $(1, 2, 3)$.

7. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

więc wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$
współrzędne $(2, 1, 0)$.

Lemat

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech

$v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$. Jeżeli

$v \in \text{lin}(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$ oraz $v \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$, to dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$v_i \in \text{lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n).$$

Dowód.

Założmy, że $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$, dla pewnych $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$.

Zauważmy, że istnieje $a_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$: gdyby $a_1 = \dots = a_m = 0$, to wówczas

$$v = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n).$$

Wobec tego:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} + \frac{1}{a_i} v - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_m}{a_i} v_m - \frac{b_1}{a_i} w_1 - \dots - \frac{b_n}{a_i} w_n$$



Twierdzenie (Lemat Steinitza¹ o wymianie)

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$. Załóżmy, że $V = \text{lin}(v_1, \dots, v_m)$ oraz że $w_1, \dots, w_n$ są liniowo niezależne. Wówczas:

1. $n \leq m$,
2. istnieją $i_1, i_2, \dots, i_{m-n}$ takie, że

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$$

.

¹Ernst Steinitz (1871-1928) urodzony w Laurahütte, dziś część Siemianowic Śląskich.

Dowód:

Dowód prowadzimy indukcyjnie względem n .

Dla $n = 0$ nie ma czego dowodzić.

Założmy, że jeśli $w_1, \dots, w_n$ są liniowo niezależne, to $n \leq m$ oraz istnieją $i_1, \dots, i_{m-n}$ takie, że $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$.

Niech $w_1, \dots, w_{n+1}$ będą liniowo niezależne.

Jeśli $n < m$, to $n + 1 \leq m$.

Jeśli $n = m$, to wobec założenia indukcyjnego $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$ i stąd $w_{n+1} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$, a więc $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$ nie mogą być liniowo niezależne.

Pozostaje wykazać część (2) twierdzenia.

Wobec założenia indukcyjnego:

$$w_{n+1} \in V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}).$$

Ponadto $w_{n+1} \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$. Wobec Lematu ??, po ewentualnej zmianie notacji

$$v_{i_{m-n}} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Zauważmy, że ponieważ każdy z wektorów

$w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}$ jest kombinacją liniową wektorów

$w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}$ oraz ponieważ

$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$, więc w konsekwencji

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Jeżeli n -elementowy układ jest bazą przestrzeni V , to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.

Dowód.

Niech $(w_1, \dots, w_n)$ i $(v_1, \dots, v_m)$ będą bazami. Wówczas układ $(v_1, \dots, v_m)$ jest liniowo niezależny, a $(w_1, \dots, w_n)$ generujący, więc z lematu Steinitza $m \leq n$. Przez symetrię $n \leq m$. □

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni V nazywamy **wymiarem** i oznaczamy $\dim V$. Jeżeli nie istnieje skończona baza danej przestrzeni, przyjmujemy $\dim V = \infty$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Wówczas jeżeli $U < V$, to $\dim U \leq n$.

Dowód.

Wobec lematu Steinitza każdy liniowo niezależny podzbiór V ma co najwyżej n elementów. Ponadto każdy liniowo niezależny podzbiór U jest liniowo niezależnym podzbiorem V , a więc ma co najwyżej n elementów. W szczególności baza U ma co najwyżej n elementów, a więc $\dim U \leq n$. □

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$. Następujące warunki są równoważne:

1. $U = V$,
2. $\dim U = n$.

Dowód.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Jeżeli $U = V$, to oczywiście $\dim U = n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Załóżmy, że $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą U . Bazę tę można uzupełnić do bazy V . Ale baza V będzie miała n elementów, a zatem $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą V . □

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_n \in V$, niech $a_1, \dots, a_n \in F$. Równość postaci

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \theta$$

nazywamy **zależnością** między $v_1, \dots, v_n$. Ciągi współczynników $(a_1, \dots, a_n)$ odpowiadających wszystkim zależnościom między $v_1, \dots, v_n$ tworzą podzbiór przestrzeni F^n oznaczany przez $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ i nazywany **zbiorem zależności** między $v_1, \dots, v_n$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_n \in V$. Wówczas zbiór zależności $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ jest podprzestrzenią przestrzeni F^n oraz

$$\dim \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n) = n - \dim \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_n).$$

Dowód:

Sprawdzenie, że $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ jest podprzestrzenią pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Niech $r = \dim \text{lin}(v_1, \dots, v_n)$.

Wówczas każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór zbioru $\{v_1, \dots, v_n\}$ składa się z r elementów.

Możemy założyć, że $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne.

Wówczas

$$v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r$$

dla pewnych $a_{i1}, \dots, a_{ir} \in F$, $i \in \{1, \dots, n-r\}$.

Pokażemy, że

$$\begin{aligned} & (a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0), \\ & (a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0), \\ & \vdots \\ & (a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \end{aligned}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$.

Ponieważ

$$a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r - v_{r+i} = \theta$$

więc $(a_{i1}, \dots, a_{ir}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$.

Założmy, że

$$\begin{aligned}(0, \dots, 0) &= x_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ &+ x_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &+ x_{n-r}(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1).\end{aligned}$$

W szczególności dla współrzędnej $n - r + i$:

$$-x_i = 0,$$

a więc $x_1 = \dots = x_{n-r} = 0$ i wektory są liniowo niezależne.

Ustalmy $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$.

Wówczas

$$\begin{aligned}
 & (a_1, \dots, a_n) + a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\
 & \quad + \quad a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\
 & \quad \quad \vdots \\
 & \quad + \quad a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \\
 & = \quad (a_1 + a_1 a_{11} + \dots + a_n a_{n-r,1}, \dots, (a_r + a_1 a_{1r} + \dots + a_n a_{n-r,r}, 0, \dots) \\
 & \in \quad \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n),
 \end{aligned}$$

a zatem

$$(a_1 + a_1 a_{11} + \dots + a_n a_{n-r,1})v_1 + \dots + (a_r + a_1 a_{1r} + \dots + a_n a_{n-r,r})v_r = \theta.$$

Ponieważ $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne, więc

$$a_1 + a_1 a_{11} + \dots + a_n a_{n-r,1} = \dots = a_r + a_1 a_{1r} + \dots + a_n a_{n-r,r} = 0$$

i tym samym

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) = & -a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ & - a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ & \vdots \\ & - a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1).\end{aligned}$$

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, U_2 < V$, $\dim U_1 < \infty$, $\dim U_2 < \infty$. Wówczas $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$, $\dim(U_1 + U_2) < \infty$ oraz

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Dowód:

Ponieważ $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ oraz $\dim U_1 < \infty$, więc $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$.

Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą $U_1 \cap U_2$.

Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$ podprzestrzeni U_1 i do bazy $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$ podprzestrzeni U_2 .

Oczywiście $\text{lin}(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n, \dots, w_m) = U_1 + U_2$.

Pokażemy, że wektory $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n, w_{k+1}, \dots, w_m)$ są liniowo niezależne.

Założmy, że $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_m w_m = \theta$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n, b_{k+1}, \dots, b_m \in F$.

Wówczas

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = -b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_m w_m \in U_2,$$

a więc $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in U_1 \cap U_2$.

Tym samym $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$, a więc

$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_m w_m = \theta$ i skoro $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$ są liniowo niezależne, więc również $a_1 = \dots = a_k = b_{k+1} = \dots = b_m = 0$.

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V < \infty$, niech $U_1, U_2 < V$. Wówczas

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - n$$

gdzie $\dim V = n$.

Dowód.

Wystarczy zauważyć, że $\dim(U_1 + U_2) \leq n$.



Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V < \infty$. **Hiperpłaszczyzną** nazywamy każdą podprzestrzeń przestrzeni V o wymiarze $n - 1$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$ i niech $\dim U = k$. Wówczas U jest częścią wspólną $n - k$ hiperpłaszczyzn.

Dowód.

Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą U .

Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ przestrzeni V .

Niech $W_i = \text{lin}(v_1, \dots, v_{k+i-1}, v_{k+i+1}, \dots, v_n)$, $i \in \{1, \dots, n-k\}$.

Pokażemy, że $U = W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$.

Oczywiście $U = \text{lin}(v_1, \dots, v_k) \subset W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$.

Ustalmy $v \in W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$.

Niech $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$.

Ustalmy $i \in \{1, \dots, n-k\}$.

Wówczas $v \in W_i$, a więc $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in W_i$.

Tym samym $a_{k+i} = 0$.



Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $W_1, \dots, W_l$ będą hiperpłaszczyznami. Wówczas

$$\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l.$$

Dowód.

Dla $l = 1$ nie ma czego dowodzić.

Założmy, że $l > 1$ i że dla l hiperpłaszczyzn rezultat jest prawdziwy. Niech $W_1, \dots, W_{l+1}$ będą hiperpłaszczyznami.

Wówczas $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l$.

Wobec poprzedniego wniosku $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l \cap W_{l+1}) \geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) + n - 1 - n \geq n - l - 1 = n - (l + 1)$.



Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$ i niech $\dim U = k$. Wówczas U jest częścią wspólną $n - k$, ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn.