

Kombinacje liniowe wektorów.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $A \subset V$. Zbiór wektorów A nazywamy **liniowo niezależnym**, jeżeli

$$\forall m \in \mathbb{N} \forall v_1, \dots, v_m \in A \forall a_1, \dots, a_m \in F \\ [a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0].$$

Jeżeli dany zbiór wektorów nie jest liniowo niezależny, to mówimy, że jest **liniowo zależny**.

Uwaga:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech

$$A = \{v_1, \dots, v_m\}.$$

Wówczas zbiór A jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall a_1, \dots, a_m \in F [a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0].$$

Przykłady:

1. Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^3 .

Wówczas wektory $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\epsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ są

liniowo niezależne.

Istotnie, ustalmy $a_1, a_2, a_3 \in F$ i założmy, że

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że a_1, a_2, a_3 jest rozwiązaniem układu:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 + 0a_2 + 1a_3 = 0 \end{cases} .$$

Macierz współczynników lewych stron równań układu $\mathcal{U}$ jest równa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a jej wyznacznik $\det(A) = 1 \neq 0$, a zatem wobec wzorów Cramera układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

2. Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^3 .

Wówczas wektory $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

są liniowo zależne.

Istotnie:

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_m \in V$. Wektory $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $v \in \{v_1, \dots, v_m\}$ będący kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

($\Rightarrow$) : Załóżmy, że $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne.
Wówczas istnieją skalary $a_1, \dots, a_m \in F$ takie, że

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \textit{theta},$$

z których przynajmniej jeden jest niezerowy.

Powiedzmy, że $a_1 \neq 0$.

Wobec tego:

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m.$$

($\Leftarrow$) : Załóżmy, że jeden z wektorów, powiedzmy v_1 , jest kombinacją liniową $v_2, \dots, v_m$:

$$v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_m v_m.$$

Wówczas $1 \cdot v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_m v_m = \theta$ oraz $1 \neq 0$.

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $A \subset B \subset V$. Wówczas:

1. jeśli A jest liniowo zależny, to B jest liniowo zależny;
2. jeśli B jest liniowo niezależny, to A jest liniowo niezależny;
3. jeśli A jest liniowo zależny, to istnieją wektory $v_1, \dots, v_m \in A$, które są liniowo zależne.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U < V$.

Warstwą wektora $v \in V$ względem podprzestrzeni U nazywamy zbiór

$$v + U = \{v + w : w \in U\}.$$

Zbiór wszystkich warstw oznaczamy przez V/U .

Przykład:

3. Rozważmy ciało $\mathbb{Z}_3$ i przestrzeń $\mathbb{Z}_3^2$.

Sprawdzamy, że

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{Z}_3^2$, zaś sama przestrzeń $\mathbb{Z}_3^2$ składa się z następujących wektorów:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_3^2 = \bigg\{ & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \bigg\}. \end{aligned}$$

Warstwy podprzestrzeni U to:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = U\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + U = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = W_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + U = W_2, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + U = W_2.$$

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U < V$.
W zbiorze warstw V/U definiujemy dodawanie:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$$

oraz mnożenie przez skalar $a \in F$:

$$a \cdot (v + U) = (a \cdot v) + U.$$

Wówczas $(V/U, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową. Nazywamy ją **przestrzenią ilorazową**.

Przykład:

4. Odwołując się do poprzedniego przykładu, rozważmy przestrzeń ilorazową $\mathbb{Z}_3^2/U = \{U, W_1, W_2\}$, gdzie

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

oraz

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sprawdzamy, że, na przykład:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + U \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U. \end{aligned}$$

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$ i rozważmy układ równań o współczynnikach z ciała F :

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Niech ponadto $\mathcal{U}_0$ będzie układem jednorodnym powstałym z $\mathcal{U}$ przez zastąpienie prawych stron równań zerami:

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór rozwiązań $Sol(\mathcal{U})$ jest warstwą podprzestrzeni rozwiązań układu jednorodnego $U = Sol(\mathcal{U}_0)$ w przestrzeni F^n .

Dowód:

Niech $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ będą rozwiązaniami układu $\mathcal{U}$.

Pokażemy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix} \in U = \text{Sol}(\mathcal{U}_0).$$

Ustalmy $i \in \{1, \dots, m\}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + \dots + a_{in}(x_n - y_n) \\ &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) - (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) \\ &= b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$.

Wobec dowolności $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, oznacza to, że $Sol(U) \subset \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$.

Dla dowodu drugiej inkluzji ustalmy

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U, \text{ gdzie}$$
$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in U.$$

Ustalmy $i \in \{1, \dots, m\}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(y_1 + z_1) + a_{i2}(y_2 + z_2) + \dots + a_{in}(y_n + z_n) \\ &= (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) + (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{in}z_n) \\ &= b_i + 0 = b_i, \end{aligned}$$

a zatem $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \text{Sol}(\mathcal{U})$ i $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U \subset \text{Sol}(\mathcal{U})$.

Uwaga:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$.

1. Zbiór

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni V .

2. Zbiór

$$U_1 + \dots + U_n = \{u_1 + \dots + u_n : u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni V .

Dowód:

Pokażemy część (1) uwagi, dowód części (2) przebiega analogicznie.

Ustalmy $u_1 + u_2, u'_1 + u'_2 \in U_1 + U_2$, gdzie $u_1, u'_1 \in U_1$ oraz $u_2, u'_2 \in U_2$.

Wówczas:

$$(u_1 + u_2) + (u'_1 + u'_2) = \underbrace{(u_1 + u'_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u'_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2.$$

Ponadto dla $a \in F$:

$$a(u_1 + u_2) = \underbrace{(au_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(au_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$.

Podprzestrzeń $U_1 + U_2$ nazywamy **sumą podprzestrzeni** U_1 i U_2 .

Ogólniej, odprzestrzeń $U_1 + \dots + U_n$ nazywamy sumą podprzestrzeni $U_1, \dots, U_n$.

Przykład:

5. Rozważmy przestrzeń liniową V i jej podprzestrzeń $U = \text{lin}(u_1, \dots, u_n)$ oraz $W = \text{lin}(w_1, \dots, w_m)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} v \in U + W &\Leftrightarrow v = u + w \text{ oraz } u \in U, w \in W \\ &\Leftrightarrow v = u + w \text{ oraz } u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n, \\ &\quad w = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m, \\ &\quad \text{dla pewnych } a_1, \dots, a_n \in F, b_1, \dots, b_m \in F \\ &\Leftrightarrow v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b_1 w_1 + \dots + b_m w_m, \\ &\quad \text{dla pewnych } a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in F \\ &\Leftrightarrow v \in \text{lin}(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m). \end{aligned}$$

A zatem

$$\text{lin}(u_1, \dots, u_n) + \text{lin}(w_1, \dots, w_m) = \text{lin}(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m).$$

Uwaga:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$.

1. Następujące dwa warunki są równoważne:

(a) $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$,

(b) jeśli $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$, gdzie $u_1, u'_1 \in U_1$, $u_2, u'_2 \in U_2$, to $u_1 = u'_1$ oraz $u_2 = u'_2$.

2. Następujące dwa warunki są równoważne:

(a) $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) = \{\theta\}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$,

(b) jeśli $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n$, gdzie $u_i, u'_i \in U_i$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, to $u_i = u'_i$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dowód:

Pokażemy część (1) uwagi, dowód części (2) przebiega analogicznie.

Założmy, że $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$ i niech $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$, dla pewnych $u_1, u'_1 \in U_1$, $u_2, u'_2 \in U_2$.

Wówczas $U_1 \ni u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2 \in U_2$.

Skoro $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$, więc $u_1 - u'_1 = \theta$ oraz $u'_2 - u_2 = \theta$.

Stąd $u_1 = u'_1$ oraz $u_2 = u'_2$.

Na odwrót, załóżmy, że jeśli $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$, gdzie $u_1, u'_1 \in U_1$, $u_2, u'_2 \in U_2$, to $u_1 = u'_1$ oraz $u_2 = u'_2$.

Ustalmy $u \in U_1 \cap U_2$.

Wówczas:

$$u = \underbrace{u}_{\in U_1} + \underbrace{\theta}_{\in U_2} = \underbrace{\theta}_{\in U_1} + \underbrace{u}_{\in U_2},$$

a zatem $u = \theta$.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$.

Jeżeli $V = U_1 + U_2$ oraz spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków Uwagi 1., to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni U_1 i U_2 , co oznaczamy przez $V = U_1 \oplus U_2$.

Podprzestrzeń U_2 nazywamy wtedy **dopełnieniem liniowym** podprzestrzeni U_1 .

Ogólniej, jeżeli $V = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ oraz spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków Uwagi 2., to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni $U_1, U_2, \dots, U_n$, co oznaczamy przez $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

Uwaga:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$ i niech $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$. Wówczas $V \cong U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$.

Dowód:

Zdefiniujmy odwzorowanie $f : V \rightarrow U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ wzorem

$$f(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Sprawdzenie, że jest to dobrze określony izomorfizm pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.