

Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie

Definicja:

Niech F będzie ciałem.

Algebrę $(V, F, +, \cdot)$, gdzie $V \neq \emptyset$, $+$ jest działaniem w zbiorze V zwanym **dodawaniem wektorów**, a $\cdot$ jest działaniem zewnętrznym ciała F na V zwanym **mnożeniem przez skalar** nazywamy **przestrzenią liniową** (lub **wektorową**), jeżeli:

1. $\forall v, w, u \in V [v + (u + w) = (v + u) + w]$,
2. $\forall v, w \in V [v + w = w + v]$,
3. $\forall v \in V \exists w \in W [v + w = \theta]$, gdzie θ jest pewnym ustalonym elementem V ,
4. $\forall v \in V [v + \theta = \theta + v = v]$,
5. $\forall a, b \in F \forall v \in V [(a + b)v = av + bv]$,
6. $\forall a \in F \forall v, w \in V [a(v + w) = av + aw]$,
7. $\forall a, b \in F \forall v \in V [a(bv) = (ab)v]$,
8. $\forall v \in V [1 \cdot v = v]$.

Elementy zbioru V tradycyjnie nazywamy **wektorami**.

Przykłady:

1. Niech E będzie płaszczyzną euklidesową, niech $P \in E$ będzie ustalonym punktem niech

$$S_P(E) = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in E\}$$

będzie zbiorem wektorów zaczepionych w punkcie P .

Wówczas $(S_P(E), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ jest działaniem dodawania wektorów na płaszczyźnie zgodnie z regułą równoległoboku, a $\cdot$ jest działaniem mnożenia wektorów przez skalary rzeczywiste.

2. Szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji jest przestrzeń $(S_{(0,0)}(E), \mathbb{R}, +, \cdot)$ wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $(0, 0)$.

3. Uogólnieniem poprzedniego przykładu jest **przestrzeń współrzędnych**.

Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$, niech

$$F^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \dots, a_n \in F \right\}.$$

Wówczas $(F^n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad a \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix}.$$

4. Wektory przestrzeni współrzędnych wygodnie jest czasem zapisywać poziomo zamiast pionowo.

Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$, niech

$$F_n = \{[a_1, \dots, a_n] : a_1, \dots, a_n \in F\}.$$

Wówczas $(F_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$[a_1, \dots, a_n] + [b_1, \dots, b_n] = [a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n]$$

oraz

$$a[a_1, \dots, a_n] = [aa_1, \dots, aa_n].$$

5. Niech F będzie dowolnym ciałem.

Wówczas $(M_n^m(F), F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar.

6. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech

$$F^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in F, \text{ dla } i \in \mathbb{N}\}$$

będzie zbiorem ciągów elementów ciała F .

Wówczas $(F^\infty, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

oraz

$$a(a_1, a_2, \dots) = (aa_1, aa_2, \dots).$$

7. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech

$$F^{(\infty)} = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in F, \text{ dla } i \in \mathbb{N}, a_i = 0 \text{ dla prawie wszystkich } i\}$$

będzie zbiorem ciągów elementów ciała F o skończonej liczbie niezerowych wyrazów.

Wówczas $(F^{(\infty)}, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi jak w poprzednim przykładzie.

8. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $A \neq \emptyset$ będzie niepustym zbiorem, niech

$$F^A = \{f : A \rightarrow F : f \text{ jest funkcją}\}$$

będzie zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru A w ciało F .
Wówczas $(F^A, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi następująco:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ dla } x \in A,$$

oraz

$$(a \cdot f)(x) = af(x), \text{ dla } x \in A.$$

9. Szczególnym przypadkiem poprzedniego przykładu jest sytuacja, w której zbiór $A = \{x\}$ jest jednoelementowy. Zbiór F^A oznaczamy wówczas F^x i przestrzeń $(F^x, F, +, \cdot)$ definiujemy przez działania jak w poprzednim przykładzie.

10. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem na prostej rzeczywistej, niech

$$C_n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f^{(n)} \text{ jest ciągła}\}$$

będzie zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych na przedziale I , których n -ta pochodna jest ciągła.

Wówczas $(C_n(I), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie działania $+$ i $\cdot$ definiujemy jak w poprzednich dwóch przykładach.

11. Niech F będzie dowolnym ciałem.

Wówczas $(F[x], F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

12. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$ i niech

$$F[x]_n = \{f \in F[x] : \deg f \leq n\}$$

będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej n .

Wówczas $(F[x]_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

13. Niech F będzie dowolnym ciałem.
Wówczas $(F[x_1, \dots, x_n], F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową,
gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia
wielomianu przez skalar.

14. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $m \in \mathbb{N}$ i niech

$$F[x_1, \dots, x_n]_m = \{f \in F[x_1, \dots, x_n] : \deg f \leq m\}$$

będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej m .

Wówczas $(F[x_1, \dots, x_n]_m, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

15. Rozważmy ciała $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Wówczas $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania liczb rzeczywistych i mnożenia liczb rzeczywistych przez liczby wymierne.

Podobnie $(\mathbb{C}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ są przestrzeniami liniowymi.

16. Powyższy przykład można uogólnić jak następuje: niech F i E będą dowolnymi ciałami, przy czym $F \subset E$.
Wówczas $(E, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania w ciele E i mnożenia elementów ciała E przez elementy podciała F .

17. Szczególny przypadek poprzedniego przykładu zachodzi, gdy $E = F$.
Wówczas $(F, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową ciała F nad samym sobą.

18. Niech $(V_i, F, +_i, \cdot_i)$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F .

Wówczas $(V_1 \times \dots \times V_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi następująco:

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1 +_1 w_1, v_2 +_2 w_2, \dots, v_n +_n w_n)$$

oraz

$$a \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = (a \cdot_1 v_1, a \cdot_2 v_2, \dots, a \cdot_n v_n).$$

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Wówczas:

1. $\forall v, w, u \in V [v + w = v + u \Rightarrow w = u]$,
2. $\forall v, w \in V [v = -w \Rightarrow v + w = 0]$,
3. $\forall v, w \in V [v - w = v + (-w)]$,
4. $\forall a \in F \forall v \in V [av = \theta \Rightarrow a = 0 \vee v = 0]$,
5. $\forall a \in F [a \cdot \theta = \theta]$,
6. $\forall v \in V [0 \cdot v = \theta]$,
7. $\forall v \in V [-v = (-1)v]$,
8. $\forall v, w, u \in V [v - (w + u) = (v - w) - u]$,
9. $\forall v, w, u \in V [v - (w - u) = (v - w) + u]$,
10. $\forall v, w \in V [-(v + w) = (-v) + (-w)]$,
11. $\forall v, w \in V [-(v - w) = (-v) + w]$
12. $\forall v, w \in V \forall a \in F [a(v - w) = av - aw]$, ,
13. $\forall v \in V \forall a, b \in F [(a - b)v = av - bv]$,
14. $\forall v \in V \forall a \in F [a(-v) = (-a)v = -av]$,
15. $\forall v \in V \forall a \in F [(-a)(-v) = av]$.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Podzbiór U przestrzeni V nazywamy **podprzestrzenią**, jeżeli:

1. $\forall v, w \in U [v + w \in U]$,
2. $\forall a \in F \forall v \in U [a \cdot v \in U]$.

Podprzestrzenie oznaczamy symbolem $U < V$.

Przykłady:

19. Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^2 , a w niej podzbiór

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} : a \in F \right\}.$$

Wówczas zbiór ten jest podprzestrzenią.

Istotnie, dla dowolnych dwóch wektorów $\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix}$ i dla dowolnego skalaru $\lambda \in F$ zachodzi:

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b) \\ 2(a+b) \end{bmatrix} \in U$$

oraz

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda a) \\ 2(\lambda a) \end{bmatrix} \in U.$$

19. Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^2 , a w niej podzbiór

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} : a \in F \right\}.$$

Wówczas nie jest to podprzestrzeń; istotnie $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$ oraz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in U, \text{ ale}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+1 \end{bmatrix} \notin U.$$

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$ i rozważmy jednorodny układ równań o współczynnikach z ciała F :

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór rozwiązań $Sol(\mathcal{U})$ jest podprzestrzenią przestrzeni F^n .

Dowód:

Niech $x_1, \dots, x_n$ oraz $y_1, \dots, y_n$ będą rozwiązaniami układu $\mathcal{U}$,
niech $a \in F$.

Oczywiście rozwiązania te możemy interpretować jako wektory

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ przestrzeni F^n .

Pokażemy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in \text{Sol}(\mathcal{U}).$$

Istotnie, wystarczy pokazać, że $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$ jest rozwiązaniem układu $\mathcal{U}$.

Ustalmy $i \in \{1, \dots, m\}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \dots + a_{in}(x_n + y_n) \\ &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) + (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Pozostaje sprawdzić, że $a \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \text{Sol}(\mathcal{U})$.

Faktycznie, dla $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$a_{i1}(ax_1) + a_{i2}(ax_2) + \dots + a_{in}(ax_n) = a(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = a0 = 0.$$

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Podzbiór $U \subset V$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $(U, F, +|_{U \times U}, \cdot|_{F \times U})$ jest przestrzenią liniową.

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\mathcal{W}$ będzie pewną rodziną podprzestrzeni przestrzeni V . Wówczas $\bigcap \mathcal{W} < V$.

Dowód:

Ustalmy $v, w \in \bigcap \mathcal{W}$ oraz $a \in F$.

Pokażemy, że $v + w \in \bigcap \mathcal{W}$.

Istotnie, jako że $v, w \in \bigcap \mathcal{W}$, więc $v, w \in U$ dla wszystkich $U \in \mathcal{W}$, a stąd $v + w \in U$, dla wszystkich $U \in \mathcal{W}$.

Ale to oznacza, że $v + w \in \bigcap \mathcal{W}$.

Analogicznie sprawdzamy, że $av \in \bigcap \mathcal{W}$.

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , a $A \subset V$ pewnym zbiorem. Najmniejszą podprzestrzeń przestrzeni V zawierającą zbiór A nazywamy **podprzestrzenią generowaną przez A** i oznaczamy $\text{lin}(A)$. Każdy zbiór A o tej własności, że $\text{lin}(A) = U$ nazywamy **zbiorem generatorów** podprzestrzeni U . Jeśli $A = \{v_1, \dots, v_m\}$, to oznaczamy

$$\text{lin}(v_1, \dots, v_m) = \text{lin}(A).$$

Mówimy, że podprzestrzeń U jest **skończenie generowana**, gdy istnieją takie wektory $v_1, \dots, v_m \in V$, że

$$U = \text{lin}(v_1, \dots, v_m).$$

**Twierdzenie o postaci elementów podprzestrzeni
generowanej przez zbiór:**

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F oraz niech $A \subset V$. Wówczas

$$\text{lin}(A) = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, v_1, \dots, v_m \in A\}.$$

Dowód:

Oznaczmy

$$U = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, v_1, \dots, v_m \in A\}.$$

Pokażemy, że $U < V$.

Istotnie, jeśli $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m, a'_1 v'_1 + \dots + a'_m v'_m \in U$, to wówczas $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + a'_1 v'_1 + \dots + a'_m v'_m \in U$.

Podobnie dla $a \in F$ mamy

$$a(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = aa_1 v_1 + \dots + aa_m v_m \in U.$$

Pokażemy, że $U = \text{lin}(A)$.

Inkluzja $(\supset)$ jest oczywista, pozostaje wykazać $(\subset)$.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem m .

Dla $m = 1$ niech $v_1 \in A$.

Wówczas $a_1 v_1$ należy do każdej podprzestrzeni zawierającej v_1 , w szczególności do $\text{lin}(A)$.

Dla $m > 1$ ustalmy $v_1, \dots, v_m \in A$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$ i załóżmy, że

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in \text{lin}(A).$$

Ustalmy $a_{m+1} \in F$ oraz $v_{m+1} \in A$.

Wówczas

$$\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m}_{\in \text{lin}(A)} + a_{m+1} \underbrace{v_{m+1}}_{\in \text{lin}(A)}.$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\in \text{lin}(A)}$

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_m \in V$, niech $a_1, \dots, a_m \in F$. Wektor

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, \dots, v_m$.

Przykłady:

21. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Wektor

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest kombinacją liniową wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definicja:

Niech $(V, F, +_V, \cdot_V)$ i $(W, F, +_W, \cdot_W)$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F . Funkcję $f : V \rightarrow W$ nazywamy **izomorfizmem** przestrzeni liniowych, jeżeli jest bijekcją i spełnione są warunki:

1. $\forall v, w \in V [f(v +_V w) = f(v) +_W f(w)],$
2. $\forall a \in F \forall v \in V [f(a \cdot_V v) = a \cdot_W f(v)].$

Jeżeli istnieje izomorfizm $f : V \rightarrow W$, to przestrzenie V i W nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez $V \cong W$.

Przykłady:

22. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas przestrzenie F^n oraz F_n są izomorficzne.
Istotnie, rozważmy funkcję $f : F^n \rightarrow F_n$ daną wzorem

$$f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = [x_1, \dots, x_n].$$

Sprawdzenie, że funkcja ta jest bijekcją pozostawiamy czytelnikowi jako łatwe ćwiczenie.

Ustalmy $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in F^n$ oraz $a \in F$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}\right) \\ &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n] = [x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] \\ &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Podobnie:

$$\begin{aligned} & f\left(a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}\right) \\ &= [ax_1, \dots, ax_n] = a[x_1, \dots, x_n] \\ &= a\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

23. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$.
 Wówczas przestrzenie F_{nm} oraz $M_m^n(F)$ są izomorficzne.
 Istotnie, podobnie jak wcześniej sprawdzamy, że odwzorowanie $f : F_{nm} \rightarrow M_m^n(F)$ dane wzorem:

$$f([x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}]) \\
= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

24. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas przestrzenie F_{n+1} oraz $F[x]_n$ są izomorficzne.
Istotnie, podobnie jak wcześniej sprawdzamy, że odwzorowanie $f : F_{n+1} \rightarrow F[x]_n$ dane wzorem:

$$f([a_0, a_1, \dots, a_n]) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Twierdzenie:

Izomorfizm przestrzeni liniowych jest relacją równoważności w klasie wszystkich przestrzeni liniowych.

Przykład:

25. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n, m \in \mathbb{N}$.
Wówczas przestrzenie F^{nm} i $M_m^n(F)$ są izomorficzne. Istotnie, poprzednio sprawdziliśmy, że $F^{nm} \cong F_{nm}$ oraz $F_{nm} \cong M_m^n(F)$.
Ponieważ relacja $\cong$ jest równoważnością, a więc w szczególności jest przechodnia, również $F^{nm} \cong M_m^n(F)$.
Podobnie możemy sprawdzić, że $F^{n+1} \cong F[x]_n$.