

Zadania, które mogą się przydać w najbliższym czasie

1. Rozwiąż w liczbach zespolonych równanie $z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0$.

2. Oblicz $(i - \sqrt{3})^{127}$.

3. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} X_1 + X_2 + aX_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = 2 \\ 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 = b \end{cases}.$$

4. Dla jakich $a, b \in \mathbb{Z}_7$ układy równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 6y + 3t = 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} 6x + 5y + 3z + 4t = 1 \\ 5x + 2y + az + bt = 4 \end{cases}$$

mają równe zbiory rozwiązań.

5. Dane są wektory $\alpha_1 = [1, 1, 2]$, $\alpha_2 = [1, 2, b]$, $\alpha_3 = [a, 1, 2]$, $\beta = [1, 2, 1]$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Dla jakich wartości parametrów a, b wektor β ma jednoznaczne przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?

6. Dane są podprzestrzenie $U = \text{lin}([1, 2, 4, 3], [2, 1, 3, 4])$, $W = \text{lin}([3, 3, 2, 2], [3, 4, 1, 2])$ przestrzeni $\mathbb{Z}_5^4$.

(a) Znajdź układ równań, którego zbiorem rozwiązań jest warstwa $[1, 1, 1, 1] + U$.

(b) Znajdź bazę przestrzeni $U + W$.

(c) Znajdź bazę przestrzeni $U \cap W$.

(d) Wskaż przynajmniej jedną podprzestrzeń $T < \mathbb{Z}_5^4$ taką, że $W \oplus T = \mathbb{Z}_5^4$.

7. Dane są podprzestrzenie $U = \text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases}\right)$, $W = \text{lin}([2, 0, -1, 3], [1, 1, 1, 1], [9, -1, -6, 14])$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$. Znajdź bazę podprzestrzeni U , W , $U + W$ oraz $U \cap W$.

8. Zbadać czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ takie, że $\ker \varphi = \text{Sol}(x + y + z = 0)$ i $\varphi([2, 1, 3]^T) = [1, 2]^T$. Jeśli istnieje, to wyznaczyć $\text{im} \varphi$ oraz znaleźć jego macierz w bazach $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ oraz $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

9. Zbadać czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Jeśli istnieje, to obliczyć $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

10. Dane jest przekształcenie liniowe $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ 2x - z \\ x + y + 4z \end{bmatrix}$ oraz podprzestrzenie $U = \text{Sol}(x + x + z = 0)$ i $W = \text{lin}([1, 2, 3], [2, 0, 3])$ przestrzeni $\mathbb{Z}_5^3$. Znajdź $f(U)$, $f(W)$, $f^{-1}(U)$ oraz $f^{-1}(W)$.

11. Macierz przekształcenia liniowego $\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach $(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_3)$, $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ jest równa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Znajdź bazę jądra i obrazu przekształcenia ψ .

12. Macierz endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{Z}_5^3)$ w bazie $([1, 0, 4], [0, 1, 0], [2, 0, 4])$ jest równa $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Znajdź bazę jądra i obrazu endomorfizmu φ .
- (b) Znajdź wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych endomorfizmu φ .
13. Macierz endomorfizmu φ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ ma postać $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
- Wyznaczyć wzór analityczny tego endomorfizmu. Zbadać czy istnieje rzeczywista macierz nieosobliwa C taka, że $C^{-1}AC$ jest diagonalna. Odpowiedź uzasadnić. Podobne pytanie o zespoloną macierz C .
14. * Dana jest przestrzeń ortogonalna $(\mathbb{R}^4, \xi)$, $q_\xi([x_1, x_2, x_3, x_4]^T) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Wyznaczyć bazę ortogonalną podprzestrzeni $\text{lin}([1, 1, 0, 1]^T, [1, 1, 1, 0]^T, [1, 3, 3, 1]^T)$.
15. * Znaleźć macierz nieosobliwą C taką, że macierz $C^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} C$ jest macierzą diagonalną.
16. * Dana jest przestrzeń ortogonalna $(\mathbb{R}^3, \xi)$, gdzie $q_\xi([x, y, z]) = 2xz + y^2$.
- (a) Znajdź macierz funkcjonału ξ w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3)$.
- (b) Znajdź bazę ortogonalną przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \xi)$.
- (c) Wyznacz rząd i sygnaturę przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \xi)$.
17. Macierz endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ w bazie jednostkowej jest równa $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- (a) Znajdź macierz endomorfizmu φ w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3)$.
- (b) Znajdź wartości własne endomorfizmu φ .
- (c) Znajdź podprzestrzenie wektorów własnych endomorfizmu φ .
- (d) * Sprawdź, czy φ jest endomorfizmem samosprężonym w przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{R}^3, \eta)$, gdzie $q_\eta([x, y, z]) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.
18. * Znajdź rzeczywistą macierz ortogonalną P , aby macierz $P^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} P$ była diagonalna.

Uwaga. Zadania z gwiazdkami nie pojawiają się na ćwiczeniach, ale całkiem do nich podobne planowane są na wykładzie w ramach przykładów ilustrujących teorię. Na egzaminie może się pojawić co najwyżej jedno spośród nich.