Rozdział I

LOGIKA MATEMATYCZNA

1. Wartość logiczna zdania

Przedmiotem logiki są związki między zdaniami.

Zdaniem nazywamy w logice wypowiedź orzekającą, której można przypisać (w ramach danej nauki) jedną z dwóch ocen: ocenę *prawdy* albo ocenę *fałszu*. Prawdziwość i fałszywość nazywamy *wartościami logicznymi* zdania. Prawdę oznaczamy cyfrą 1, a fałsz cyfrą 0.

Na przykład zdanie

7 jest liczbą pierwszą

jest w arytmetyce zdaniem prawdziwym, więc przypisujemy mu wartość 1, natomiast zdanie

7 jest liczbą parzystą

jest w arytmetyce zdaniem fałszywym, więc przypisujemy mu wartość 0.

Nie każde zdanie gramatyczne może być zdaniem w logice. Na przykład zdanie

Czy 7 jest liczbą parzystą?

nie jest zdaniem orzekającym i nie można mu przypisać żadnej wartości logicznej. Zdanie

7 jest liczbą szczęśliwą

jest wprawdzie zdaniem orzekającym, ale w ramach arytmetyki – bezsensownym (ani prawdziwym, ani fałszywym).

Logika nie ustala wartości logicznych pojedynczych zdań. Czyni to odpowiednia nauka, przy czym to samo zdanie może być prawdziwe w jednej nauce, a fałszywe lub bezsensowne w innej nauce; na przykład zdanie

istnieje iloraz 8 przez 3

jest fałszywe w arytmetyce liczb całkowitych, prawdziwe w arytmetyce liczb wymiernych, a bezsensowne w botanice.

Logika ustala wartość logiczną zdań złożonych na podstawie ustalonych uprzednio wartości logicznych zdań składowych. Na przykład z prawdziwości zdań

7 jest liczbą pierwszą
7 jest liczbą nieparzystą
wynika dzięki logice prawdziwość zdania
7 jest liczbą pierwszą i nieparzystą.

Pytania

1. Co to jest zdanie w logice?
2. Podać przykład zdania gramatycznego, które nie jest zdaniem w logice.
3. Ocenić (w ramach matematyki) wartość logiczną zdania
   a) 121 jest liczbą pierwszą
   b) 361 jest kwadratem liczby naturalnej
   c) każdy trójkąt równoramienny jest prostokątny
   d) istnieje równoramienny trójkąt prostokątny
   e) romb jest figurą brzydką
   f) podziel 6 przez 3!
   g) kwadrat każdej liczby ujemnej jest dodatni
   h) istnieje liczba ujemna, której kwadrat jest dodatni
   i) czy kwadrat jest prostokątem?

2. Zaprzeczenie zdania

Zdania oznaczamy w logice małymi literami alfabetu.

Definicja. Zdanie

$$\textbf{nieprawda, że } p \tag{2.1}$$

nazywamy *zaprzeczeniem* (*negacją*) zdania p i zapisujemy

$$\sim p$$

(znak $\sim$ czytamy: *nieprawda*, że ..., lub krótko: *nie*).

Na przykład jeżeli p oznacza zdanie

3 jest liczbą parzystą

to $\sim p$ oznacza zdanie

nieprawda, że 3 jest liczbą parzystą

W tym przykładzie zdanie p jest fałszywe, czyli ma wartość logiczną 0 (można pisać $p = 0$), zaś zdanie $\sim p$ jest prawdziwe ($p = 1$).

Dwa zdania: p oraz $\sim p$ nazywamy *sprzecznymi.*

Negację charakteryzuje (tzn. określa jej sens w logice) tabl. 2-1: jeżeli zdanie p jest prawdziwe to $\sim p$ jest fałszywe, a jeżeli p jest fałszywe to $\sim p$ jest prawdziwe.

Stąd wynikają następujące prawa logiki:

Prawo sprzeczności: *z dwóch zdań: p oraz $\sim p$ co najmniej jedno jest fałszywe.*

Prawo sprzeczności orzeka, że dwa zdania sprzeczne nie mogą być jednocześnie prawdziwe, tzn.

nieprawda, że *p* i nie *p*

Prawo wyłączonego środka: *z dwóch zdań: p oraz $\sim p$ co najmniej jedno jest prawdziwe.*

To prawo orzeka, że dwa zdania sprzeczne nie mogą być jednocześnie fałszywe, tzn.

p* lub nie *p

Tabl. 2-1
NEGACJA

p	$\sim p$
0	1
1	0

Zauważmy, że dwa przypadki

p jest zdaniem prawdziwym

oraz

$\sim p$ jest zdaniem prawdziwym

wyczerpują wszystkie możliwości. Stąd też wywodzi się łacińska nazwa prawa wyłączonego środka: *tertium non datur* (trzeciej możliwości nie ma).

Wniosek: *z dwóch zdań: p oraz $\sim p$ jedno jest prawdziwe, natomiast pozostałe jest fałszywe.*

Uwaga. W mowie potocznej nazywa się *sprzecznymi* takie dwa zdania, które nie mogą być jednocześnie prawdziwe, np:

$$\text{kąt prosty jest mniejszy od } 90^\circ \tag{2.2}$$

oraz

$$\text{kąt prosty jest większy od } 90^\circ \tag{2.3}$$

Zdania sprzeczne w znaczeniu przyjętym w logice: p oraz $\sim p$ są sprzeczne w potocznym tego słowa znaczeniu (na podstawie prawa sprzeczności), ale nie na odwrót. Na przykład zdanie (2.3) nie jest zaprzeczeniem zdania (2.2), więc te dwa zdania nie są sprzeczne w znaczeniu przyjętym w logice. Spośród dwóch zdań sprzecznych w potocznym tego słowa znaczeniu co najmniej jedno jest fałszywe, może się jednak zdarzyć, że oba są fałszywe, ponieważ treść takich dwóch zdań może nie wyczerpywać wszystkich możliwości. Tak jest na przykład ze zdaniami (2.2) i (2.3). Są one oba fałszywe, gdyż kąt prosty nie jest ani mniejszy od 90° ani większy od 90°, lecz jest równy 90°.

Prawo podwójnego zaprzeczenia: *zdania*

$$p \quad \text{oraz} \quad \sim(\sim p)$$

mają tę samą wartość logiczną.

Na przykład zdanie:

istnieje najmniejsza liczba dodatnia

ma tę samą wartość logiczną (a mianowicie 0) co zdanie

nieprawda, że nieprawda, że istnieje najmniejsza liczba dodatnia.

To ostatnie zdanie można zastąpić takim

nieprawda, że nie istnieje najmniejsza liczba dodatnia.

Należy jednak mieć się na baczności, żeby doskonaląc budowę zdania nie zmienić jego wartości logicznej.

Pytania

1. Co to jest zaprzeczenie zdania? Scharakteryzować zaprzeczenie za pomocą tabelki. Co to są dwa zdania sprzeczne?
2. Podać prawo sprzeczności, prawo wyłączonego środka, oraz wynikający z nich wniosek.
3. Stwierdzono, że jedna z dwóch nierówności: $a < 2$, oraz $a > 2$, jest dla liczby a fałszywa. Czy można na tej podstawie twierdzić, że druga z tych nierówności jest prawdziwa?
4. Podać prawo podwójnego zaprzeczenia.

3. Koniunkcja zdań

Definicja. Zdanie

$$p \text{ i } q \tag{3.1}$$

nazywamy *koniunkcją* (iloczynem logicznym) zdań p, q i zapisujemy

$$p \wedge q$$

(znak $\wedge$ czytamy: *i*).

Koniunkcję charakteryzuje tabl. 3-1: koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa, gdy te oba zdania są prawdziwe, zaś fałszywa – w pozostałych przypadkach.

Tabl. 3-1

KONIUNKCJA

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Na przykład zdanie

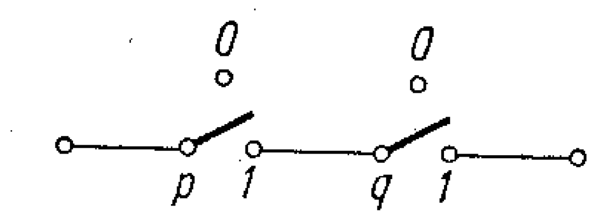
$$\left(\sin 30° = \frac{1}{2}\right) \wedge (\sin 90° = 1)$$

jest prawdziwe, natomiast zdanie

$$\left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right) \wedge (\cos 90° = 1)$$

jest fałszywe, gdyż $\cos 90° = 0$.

Interpretacja fizyczna. Niech p, q oznaczają wyłączniki, z których każdy może być włączony (stan 1) albo wyłączony (stan 0). W stanie „1" wyłącznik przewodzi prąd, natomiast w stanie „0" wyłącznik nie przewodzi prądu (rys. 3-1). Stan układu



Rys. 3-1

utworzonego przez połączenie szeregowe wyłączników p, q zależy od stanu wyłącznika p i od stanu wyłącznika q tak, jak wartość logiczna koniunkcji $p \wedge q$ zależy od wartości logicznych zdań p, q. W związku z tym mówimy krótko, że

koniunkcję realizuje połączenie szeregowe.

Pytania

1. Co to jest koniunkcja dwóch zdań? Scharakteryzować koniunkcję za pomocą tabelki.
2. Podać przykład czterech koniunkcji, które odpowiadają czterem przypadkom w tabl. 3-1.
3. Wyjaśnić interpretację fizyczną koniunkcji.

4. Alternatywa zdań

Definicja. Zdanie

$$p \text{ lub } q \tag{4.1}$$

nazywamy *alternatywą* (*sumą logiczną*) zdań p, q i zapisujemy

$$p \vee q$$

(znak $\vee$ czytamy *lub*).

Alternatywę charakteryzuje tabl. 4-1: alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa, gdy co najmniej jedno z tych dwóch zdań jest prawdziwe, zaś fałszywa – gdy oba zdania są fałszywe.

Na przykład zdanie

$$\left(\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right) \vee (\cos 90^\circ = 1)$$

jest prawdziwe, gdyż $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, natomiast zdanie

$$\left(\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

jest fałszywe.

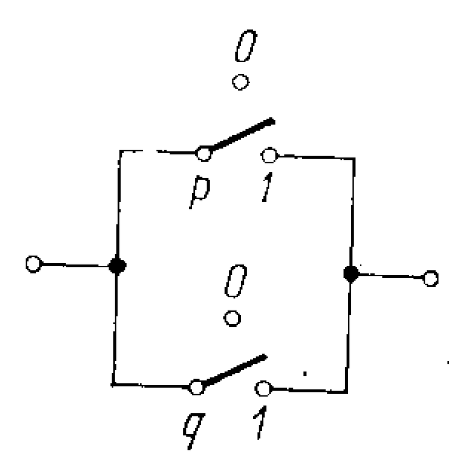
Tabl. 4-1

ALTERNATYWA

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Interpretacja fizyczna alternatywy jest przedstawiona na rys. 4-1. Stan układu utworzonego przez połączenie równoległe wyłączników p i q zależy od stanu wyłącznika p i od stanu wyłącznika q tak, jak wartość logiczna alternatywy $p \vee q$ zależy od wartości logicznych zdań p oraz q. W związku z tym mówimy krótko, że

alternatywę realizuje połączenie równoległe.



Rys. 4-1

Uwaga. Alternatywę zdań zbudowaną za pomocą spójnika lub (symbol $\vee$) należy odróżniać od tzw. alternatywy *wykluczającej*, zbudowanej za pomocą spójnika albo (symbol $\underline{\vee}$). Zdanie p albo q jest prawdziwe, gdy jedno ze zdań p, q jest prawdziwe, a drugie fałszywe, zaś fałszywe — gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną.

Na przykład

8 jest liczbą parzystą albo nieparzystą

jest zdaniem prawdziwym, natomiast zdanie

8 jest podzielne przez 2 albo przez 4

jest fałszywe.

Zaprzeczenie koniunkcji. Zdanie

nieprawda, że p i q

ma tę samą wartość logiczną co zdanie

nieprawda, że p lub nieprawda, że q

(patrz tabl. 4-2). Na przykład zdanie

nieprawda, że $\cos 0^\circ = 0$ i $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Tabl. 4-2

$\sim(p \wedge q)$	$p \wedge q$	p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0

ma tę samą wartość logiczną co zdanie

nieprawda, że $\cos 0^\circ = 0$ lub nieprawda, że $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

czyli

$$\cos 0^\circ \neq 0 \quad \text{lub} \quad \cos 60^\circ \neq \frac{1}{2}$$

Oba te zdania są prawdziwe.

Dwa zdania mające tę samą wartość logiczną nazywamy *równoważnymi*.

Zaprzeczenie koniunkcji dwóch zdań

$$\sim(p \wedge q) \tag{4.2}$$

jest więc równoważne alternatywie zaprzeczeń tych zdań

$$(\sim p) \vee (\sim q) \tag{4.3}$$

Jest to pierwsze *prawo de Morgana.*

Uwaga. Równoważność zdań (4.2) i (4.3) ustaliliśmy rozpatrując wszystkie możliwe układy wartości logicznych zdań p, q, (por. tabl. 4-2), a mianowicie:

$$p = 0,\ q = 0 \qquad p = 0,\ q = 1 \qquad p = 1,\ q = 0 \qquad p = 1,\ q = 1$$

Ta metoda dowodzenia równoważności zdań nazywa się *metodą zero-jedynkową.*

Zaprzeczenie alternatywy. Zdanie

nieprawda, że p lub q

ma tę samą wartość logiczną co zdanie

nieprawda, że p i nieprawda, że q

Sprawdzenie tego metodą zero-jedynkową pozostawiamy Czytelnikowi.

Na przykład zdanie

$$\text{nieprawda, że } \cos 0° = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 0° = \frac{1}{2}$$

ma tę samą wartość logiczną co zdanie

$$\text{nieprawda, że } \cos 0° = 0 \text{ i nieprawda, że } \cos 0° = \frac{1}{2}$$

czyli

$$\cos 0° \neq 0 \quad \text{i} \quad \cos 0° \neq \frac{1}{2}$$

Oba te zdania są prawdziwe.

Zaprzeczenie alternatywy dwóch zdań

$$\sim(p \vee q) \tag{4.4}$$

jest więc równoważne koniunkcji zaprzeczeń tych zdań

$$(\sim p) \wedge (\sim q) \tag{4.5}$$

Jest to drugie *prawo de Morgana.*

Pytania i zadania

1. Co to jest alternatywa dwóch zdań? Scharakteryzować alternatywę za pomocą tabelki.
2. Podać przykład czterech alternatyw, które odpowiadają czterem przypadkom w tabl. 4-1.
3. Wyjaśnić interpretację fizyczną alternatywy.
4. Zanotować a) prawo sprzeczności, b) prawo wyłączonego środka, za pomocą symbolów: $\sim$, $\vee$ oraz $\wedge$.
5. Korzystając z interpretacji fizycznej koniunkcji oraz alternatywy, podać interpretację fizyczną prawa sprzeczności oraz prawa wyłączonego środka.
6. Co to są prawa de Morgana? Podać interpretację fizyczną.
7. Zapis $a \leqslant b$ oznacza, że $(a < b) \vee (a = b)$. Wyjaśnić dlaczego zdania $1 \leqslant 1$ oraz $1 \leqslant 2$ są prawdziwe, zaś zdanie $1 \leqslant 0$ jest fałszywe.
8. Na czym polega metoda zero-jedynkowa? Sprawdzić za pomocą tej metody, że zdanie (4.4) ma tę samą wartość logiczną co zdanie (4.5), bez względu na wartości logiczne zdań p, q.

5. Implikacja (wynikanie)

Definicja. Zdanie

$$\textbf{jeżeli } p\textbf{, to } q \tag{5.1}$$

nazywamy *implikacją* (*wynikaniem*) o *poprzedniku* p oraz *następniku* q i zapisujemy

$$p \Rightarrow q \tag{5.2}$$

(znak $\Rightarrow$ czytamy: *implikuje* lub *z ... wynika ...*).

Implikację charakteryzuje tabl. 5-1. Implikacja jest prawdziwa w każdym przypadku z wyjątkiem jednego: gdy poprzednik jest prawdziwy i następnik jest fałszywy.

Tabl. 5-1

IMPLIKACJA

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

W mowie potocznej nie używamy słowa *wynika* w tak szerokim znaczeniu, jak to określa tabl. 5-1. Na przykład nie ma potrzeby mówić o wynikaniu w przypadku, gdy poprzednik i następnik są fałszywe. W matematyce natomiast słowo *wynika* używane jest w takim właśnie szerokim znaczeniu. Wyjaśnimy to na przykładzie. Rozważmy zdanie

$$\text{jeżeli } \underbrace{n \text{ jest podzielne przez 4}}_{p}\text{, to } \underbrace{n \text{ jest podzielne przez 2}}_{q} \tag{5.3}$$

Zdanie (5.3) ma postać implikacji $p \Rightarrow q$; jest ona w ramach arytmetyki prawdziwa, gdyż każda liczba naturalna n, która dzieli się przez 4, dzieli się także przez 2. W związku z tym mówimy, że zdanie q wynika ze zdania p. Nie robimy przy tym żadnych zastrzeżeń co do liczby naturalnej n, co jest równoznaczne z uznaniem wynikania (5.3) za prawdziwe dla każdego naturalnego n. Zauważmy, że dla $n = 6$ zdanie p jest fałszywe i zdanie q jest prawdziwe, dla $n = 7$ oba te zdania są fałszywe, zaś dla $n = 8$ oba zdania są prawdziwe. Wykluczony jest tu tylko jeden przypadek: gdy poprzednik p jest prawdziwy i następnik q jest fałszywy (por. tabl. 5-1). *Wynikanie* ma więc w matematyce to samo znaczenie, co *implikacja.*

Streszczając określenie implikacji (wynikania) powiemy, że

z prawdy wynika tylko prawda

oraz

z fałszu może wynikać zarówno prawda jak i fałsz

Uwaga. Ponieważ każde twierdzenie matematyczne można wypowiedzieć w postaci implikacji według schematu

jeżeli **ZAŁOŻENIE**, to **TEZA**

więc należy pamiętać, że spełnienie założeń (prawdziwość poprzednika) zapewnia prawdziwość tezy, jeżeli natomiast założenia nie są spełnione (fałszywość poprzednika), to może się zdarzyć, że teza jest prawdziwa i może się zdarzyć, że teza jest fałszywa.

Zaprzeczenie implikacji. Zdanie

nieprawda, że jeżeli p to q

na tę samą wartość logiczną co zdanie

p i nie q

(por. tabl. 5-2).

Tabl. 5-2

$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow q$	p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0

Na przykład zdanie

nieprawda, że jeżeli $1\cdot(1-1) = 2\cdot(1-1)$ to $1 = 2$

(prawdziwe) ma tę samą wartość logiczną co zdanie

$$1\cdot(1-1) = 2\cdot(1-1) \text{ i } 1 \neq 2$$

Zaprzeczenie implikacji

$$\sim(p \Rightarrow q) \qquad (5.4)$$

jest więc równoważne koniunkcji

$$p \wedge (\sim q) \qquad (5.5)$$

Jednym z najczęściej stosowanych praw logiki, jest

Reguła odrywania. *Jeżeli prawdziwe są*

wynikanie $p \Rightarrow q$ oraz *zdanie* p

to prawdziwe jest zdanie q.

Przykład. Z arytmetyki wiadomo, że implikacja: jeżeli suma cyfr liczby naturalnej dzieli się przez 3, to ta liczba dzieli się przez 3, jest prawdziwa. Zdanie suma cyfr liczby 723 dzieli się przez 3, jest także prawdziwe. Na podstawie reguły odrywania możemy więc stwierdzić, że liczba 723 dzieli się przez 3.

Nazwę *reguła odrywania* uzasadnia się tak: jeżeli prawdziwe są: implikacja $p \Rightarrow q$ oraz poprzednik p, to można z tego kontekstu oderwać (wyodrębnić) następnik q, nadając mu samoistny byt i przyjąć go jako zdanie prawdziwe (por. tabl. 5-1).

Prawo przechodniości implikacji. *Jeżeli prawdziwe są dwie implikacje*

$p \Rightarrow q$, *oraz* $q \Rightarrow r$

to prawdziwa jest implikacja

$$p \Rightarrow r$$

Przykład. Ponieważ prawdziwe są dwie implikacje

$$5\alpha = 225° \Rightarrow \alpha = 45°, \text{ oraz } \alpha = 45° \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1,$$

więc prawdziwa jest implikacja

$$5\alpha = 225° \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1$$

Zarówno reguła odrywania jak i prawo przechodniości implikacji należą do tych praw logiki, które uważamy za najzupełniej oczywiste i zrozumiałe. Dlatego w dowodach matematycznych powołujemy się wyraźnie na te prawa tylko w wyjątkowych okolicznościach. Należy jednak pamiętać, że prawa te stanowią wraz z innymi prawami logiki fundament wszelkich dowodów matematycznych.

Pytania i zadania

1. Co to jest implikacja (wynikanie)? Scharakteryzować implikację za pomocą tabelki.
2. Podać przykład czterech implikacji, które odpowiadają czterem przypadkom w tabl. 5-1.
3. Omówić zaprzeczenie a) koniunkcji, b) alternatywy, c) implikacji.
4. Ocenić (w ramach matematyki) wartość logiczną zdania
   a) jeżeli $\sin 30° = \frac{1}{2}$, to $\sin 15° = \frac{1}{4}$
   b) jeżeli $\sin 60° = 1$, to $\sin 30° = \frac{1}{2}$
   c) jeżeli $1 > 2$, to $2 > 1$
   d) jeżeli $1 > 2$, to $2 < 1$
5. Podać a) regułę odrywania, b) prawo przechodniości implikacji.
6. Udowodnić, że zdanie $p \Rightarrow q$ ma tę samą wartość logiczną co zdanie $(\sim p) \vee q$.

6. Warunek konieczny. Warunek wystarczający

Jeżeli

ze zdania p wynika zdanie q

to mówimy, że

p jest *warunkiem wystarczającym* dla q

natomiast

q jest *warunkiem koniecznym* dla p

Zamiast warunek *wystarczający* mówimy też warunek *dostateczny.*

Przykłady

Podzielność liczby n przez 4 jest warunkiem wystarczającym podzielności liczby n przez 2.

Podzielność liczby n przez 4 nie jest warunkiem **koniecznym** podzielności liczby n przez 2, o czym świadczy przykład liczby 6, która jest podzielna przez 2, lecz jest niepodzielna przez 4.

Podzielność liczby n przez 2 jest warunkiem **koniecznym** podzielności liczby n przez 4.

Podzielność liczby n przez 2 nie jest warunkiem **wystarczającym** podzielności liczby n przez 4, o czym świadczy przykład liczby 6.

Warunek konieczny oraz warunek wystarczający są to pojęcia różne. Jak zobaczyliśmy na przykładach,

warunek wystarczający dla p może nie być warunkiem koniecznym dla p

oraz

warunek konieczny dla p może nie być warunkiem wystarczającym dla p.

Może się zdarzyć, że warunek konieczny dla p jest jednocześnie warunkiem wystarczającym dla p. Mówimy wówczas, że jest to *warunek konieczny i wystarczający*.

Na przykład podzielność przez 2 i przez 5, jest warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności przez 10. Odpowiednia równość długości trzech boków jednego trójkąta trzem długościom boków drugiego trójkąta, stanowi warunek konieczny i wystarczający przystawania tych trójkątów.

Założenia w prawdziwym twierdzeniu stanowią **warunek wystarczający** na to, żeby teza tego twierdzenia była prawdziwa. Założenia te mogą jednak nie stanowić warunku **koniecznego**. Na przykład jeżeli trójkąt jest równoboczny (założenie), to promień okręgu wpisanego jest równy 1/3 wysokości trójkąta (teza); założenie nie jest w tym przypadku warunkiem koniecznym dla tezy, o czym świadczy przykład trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 4 (podstawa) i 3 (wysokość), który nie jest równoboczny i dla którego promień okręgu wpisanego równy jest 1, czyli 1/3 wysokości.

Pytania

1. Co to jest a) warunek konieczny, b) warunek wystarczający, c) warunek konieczny i wystarczający?
2. Podać przykład twierdzenia, którego założenia a) stanowią warunek konieczny i wystarczający dla tezy, b) nie stanowią warunku koniecznego dla tezy.

7. Równoważność zdań

Definicja. *Równoważność zdań p i q* jest to zdanie orzekające, że zdania p i q mają tę samą wartość logiczną.

Równoważność zdań p, q oznacza prawdziwość dwóch implikacji

$p \Rightarrow q$, oraz *odwrotnej* do niej $q \Rightarrow p$

(por. tabl. 5-1). Pierwszą z tych implikacji można odczytać krótko: p *tylko wtedy, gdy* q (p jest warunkiem wystarczającym dla q), zaś drugą: p *wtedy, gdy* q (p jest warunkiem koniecznym dla q). W związku z tym równoważność zdań p i q wypowiadamy tak:

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q \tag{7.1}$$

Zdanie (7.1) zapisujemy

$$p \Leftrightarrow q \tag{7.2}$$

(znak $\Leftrightarrow$ czytamy: *wtedy i tylko wtedy, gdy*). Równoważność (7.2) charakteryzuje tabl. 7-1.

Tabl. 7-1
RÓWNOWAŻNOŚĆ

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Jeżeli równoważność (7.2) jest prawdziwa, to zdania p oraz q nazywamy *zdaniami równoważnymi*.

Dwa zdania równoważne są to zatem takie dwa zdania, które mają tę samą wartość logiczną: oba są prawdziwe albo oba są fałszywe (por. str. 13).

Na przykład

$$2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$x-y<0 \Leftrightarrow x<y$$

Za pomocą symbolu równoważności wygodnie jest zapisać wiele praw logiki. Na przykład

Prawa de Morgana:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)] \tag{7.3}$$

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \tag{7.4}$$

Prawo podwójnego zaprzeczenia:

$$p \Leftrightarrow \sim(\sim p) \tag{7.5}$$

Prawo zaprzeczenia implikacji:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)] \tag{7.6}$$

Pytania i zadania

1. Co to jest równoważność dwóch zdań? Scharakteryzować równoważność za pomocą tabelki.
2. Co to znaczy, że dwa zdania są równoważne? Podać przykłady zdań równoważnych a następnie takich, które nie są równoważne.

3. Sprawdzić metodą zero-jedynkową prawdziwość równoważności a) (7.5), b) (7.6), c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$, d) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

4. Czy dwa zdania

$$\text{a) } x^2 > 1, \text{ oraz } x > 1$$

$$\text{b) } x^2 < 1, \text{ oraz } x < 1$$

są równoważne dla każdego rzeczywistego x?

5. Czy dwa zdania

$$\text{a) } \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{oraz} \quad \cos 30° = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 2 \leqslant 3, \quad \text{oraz} \quad 3 \geqslant 2$$

$$\text{c) } \sin\alpha = 1, \quad \text{oraz} \quad \cos\alpha = 0$$

$$\text{d) } \sin^2\alpha = 1, \quad \text{oraz} \quad \cos\alpha = 0$$

są równoważne?

8. Forma zdaniowa

Definicja. *Forma zdaniowa (funkcja zdaniowa)* z jedną zmienną, określona w dziedzinie D, jest to takie wyrażenie zawierające tę zmienną, które staje się zdaniem, gdy na miejsce zmiennej podstawimy dowolny element zbioru D.

Na przykład wyrażenie

$$x \text{ jest liczbą pierwszą} \tag{8.1}$$

jest formą zdaniową z jedną zmienną x. Dziedziną tej formy może być np. zbiór liczb naturalnych. Podstawiając do formy zdaniowej (8.1) liczbę 7 na miejsce zmiennej x, dostajemy zdanie prawdziwe, natomiast podstawiając liczbę 8 na miejsce x dostajemy zdanie fałszywe.

Każde równanie jest formą zdaniową. Na przykład równanie

$$x^2 - 1 = 0 \tag{8.2}$$

jest formą zdaniową zmiennej x.

Każda nierówność jest formą zdaniową. Na przykład nierówność

$$z^2 - 4z < 0 \tag{8.3}$$

jest formą zdaniową zmiennej z.

Mówimy, że pewien *element spełnia formę zdaniową*, jeżeli podstawiając go do tej formy na miejsce zmiennej dostajemy zdanie prawdziwe.

Na przykład liczba 11 spełnia formę zdaniową (8.1), natomiast liczba 12 nie spełnia tej formy.

Formę zdaniową nazywamy *tożsamościową*, jeżeli spełnia ją każdy element, natomiast *sprzeczną* – jeżeli nie spełnia jej żaden element (z dziedziny tej formy).

Na przykład równanie $(x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$ oraz nierówność $(x+1)^2 > 2x$ są w dziedzinie liczb rzeczywistych tożsamościowe, zaś równanie $x^2+1 = 0$, oraz nierówność $x^2+1 < 0$ są sprzeczne.

Dwie formy zdaniowe mające wspólną dziedzinę nazywamy *równoważnymi*, gdy każdy element, który spełnia pierwszą z nich spełnia także drugą i na odwrót.

Na przykład nierówności

$$-x^2 + 4x < 0, \quad \text{oraz} \quad x^2 - 4x > 0$$

są równoważne, gdyż spełnia je każda taka i tylko taka liczba, która jest ujemna lub większa od 4.

Jeżeli forma zdaniowa $p(x)$ jest równoważna formie zdaniowej $q(x)$, to piszemy

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

Na przykład

$$-x^2 + 4x < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0$$

Za pomocą spójników zdaniotwórczych ($\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) można budować formy zdaniowe *złożone*, np.

$$\sim (x^2 - 1 = 0), \quad x < 1 \vee x > 3$$

Rozpatruje się także formy zdaniowe z dwoma lub większą liczbą zmiennych. Na przykład

$$x + y = 3, \quad x + y < 2, \quad x^2 + y - z^3 > 2t, \quad \text{itp.}$$

Pytania i zadania

1. Co to jest forma zdaniowa z jedną zmienną? Podać przykłady i określić w każdym z nich dziedzinę.
2. Co to znaczy: element *spełnia* formę zdaniową?
3. Znaleźć taką wartość x, dla której forma zdaniowa a) $x^2 > 5 \wedge x < -2$, b) $x > 2x \vee x > 10$, c) $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$, d) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^3 = 27$ jest prawdziwa, a następnie taką, dla której ta forma jest fałszywa.
4. Co to znaczy, że forma zdaniowa jest a) tożsamościowa, b) sprzeczna? Podać przykłady.
5. Kiedy dwie formy zdaniowe są równoważne? Podać przykłady.

9. Kwantyfikatory

Spośród licznych zwrotów jakimi posługujemy się w matematyce przy formułowaniu zdań orzekających, na szczególną uwagę zasługują dwa:

$$\text{dla każdego } x \ldots \tag{9.1}$$

oraz

$$\text{istnieje takie } x, \text{ że } \ldots \tag{9.2}$$

Te dwa zwroty nazywamy *kwantyfikatorami;* zwrot (9.1) jest to tzw. *kwantyfikator ogólny* (albo duży), który oznaczamy symbolem

$$\bigwedge_x$$

B_3	0	0	1	1
B_4	0	1	0	0
B_5	0	1	0	1
B_6	0	1	1	0
B_7	0	1	1	1
B_8	1	0	0	0
B_9	1	0	0	1
B_{10}	1	0	1	0
B_{11}	1	0	1	1
B_{12}	1	1	0	0
B_{13}	1	1	0	1
B_{14}	1	1	1	0
B_{15}	1	1	1	1

Spośród funktorów A_i oraz B_j, gdzie $0 \leqslant i \leqslant 3$, $0 \leqslant j \leqslant 15$, funktor A_2 nazywa się *negacją* ($\sim$), zaś funktory $B_1, B_7, B_{13}, B_9, B_{14}, B_8$ odpowiednio: *koniunkcją* ($\wedge$), *alternatywą* ($\vee$), *implikacją* ($\Rightarrow$), *równoważnością* ($\Leftrightarrow$), *funktorem Sheffera* (*dyzjunkcją*) oraz *funktorem jednoczesnego zaprzeczenia*.

1.1. Zdefiniować koniukcję za pomocą alternatywy i negacji.

1.2. Zdefiniować alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.

1.3. Zdefiniować alternatywę za pomocą implikacji i negacji.

1.4. Udowodnić, że za pomocą alternatywy i koniunkcji nie można zdefiniować implikacji ani dyzjunkcji.

1.5. Udowodnić, że za pomocą równoważności i negacji nie można zdefiniować alternatywy ani koniunkcji.

1.6. Udowodnić, że za pomocą funktora A_0 oraz implikacji można zdefiniować wszystkie pozostałe funktory zdaniotwórcze (zarówno jednoargumentowe jak i dwuargumentowe).

1.7. Udowodnić, że każdy z funktorów B_8 i B_{14} wystarcza do zdefiniowania pozostałych funktorów zdaniotwórczych (zarówno jednoargumentowych jak i dwuargumentowych).

***1.8.** Udowodnić, że funktory B_8 i B_{14} są jedynymi funktorami o własności opisanej w zadaniu 1.7. Udowodnić, że za ich pomocą można zdefiniować dowolny funktor n-argumentowy (dla dowolnego n).

1.9. Niech wyrażenie (formuła) f zawiera n zmiennych zdaniowych.

Ile wartościowań należy rozpatrzyć przy badaniu, czy wyrażenie f jest tautologią?

Wykazać, że następujące wyrażenia są tautologiami (zad. 1.10-1.32):

1.10. $p \Rightarrow p$.

1.11. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

1.12. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$.

1.13. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (*prawo sylogizmu warunkowego*).

1.14. $p \Leftrightarrow \sim\sim p$ (*prawo podwójnego przeczenia*).

1.15. $p \vee \sim p$ (*prawo wyłączonego środka*).

1.16. $\sim(p \wedge \sim p)$ (*prawo sprzeczności*).

1.17. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (*prawo de Morgana*).

1.18. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (*prawo de Morgana*).

1.19. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (*prawo transpozycji*).

1.20. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ (*prawo Pierce'a*).

1.21. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

1.22. $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (*prawo Claviusa*).

1.23. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (*prawo Dunsa-Scotusa*).

1.24. $(p \wedge q) \Rightarrow p$.

1.25. $p \Rightarrow (p \vee q)$.

1.26. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$.

1.27. $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$.

1.28. $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$.

1.29. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

1.30. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

1.31. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.

1.32. $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami (zad. 1.33-1.61).

1.33. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$.

1.34. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$.

1.35. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$.

1.36. $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$.

1.37. $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

1.38. $p \vee [(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$.

1.39. $\sim [p \wedge (\sim p \wedge q)]$.

1.40. $p \Rightarrow [(\sim q \wedge q) \Rightarrow r]$.

1.41. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$.

$| \Rightarrow (\sim p \vee q)$.

$(p \Rightarrow q)$.

$\Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

$\Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee s)$.

$r) \wedge (q \Rightarrow r)]$.

$\Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$.

$q \Rightarrow \sim r)\} \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$.

$\Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

$[(q \vee r) \wedge \sim p]\}$.

$] \Rightarrow (p \wedge \sim q)$.

$[(p \wedge s) \Rightarrow (q \vee r)]$.

$\Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$.

$p]$.

$p \Rightarrow s)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r \vee s)]$.

$s \Rightarrow q)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge \sim s) \Rightarrow q]$.

$q) \Rightarrow \sim r]\} \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$.

$\Rightarrow \{[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)\}$.

$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \wedge [(q \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow p)]\}$.

$t \Rightarrow u)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge t) \Rightarrow (q \wedge s \wedge u)]$.

$\Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$.

zdanie: Jeżeli liczba naturalna a jest liczbą
ą złożoną, to a równa się 4.

zdanie: Jeżeli liczba naturalna a dzieli się
ieli się przez 3 wynika, że a dzieli się przez 5.

zdanie: Jeżeli z faktu, że wszystkie boki
a, że wszystkie kąty trójkąta ABC są równe,
ąty, to ma on również nierówne boki.

zdanie: Jeżeli figura A jest czworokątem
to z faktu, iż A jest czworokątem, wynika,

lanie: Jeżeli liczba a dzieli się przez 3 i dzieli
ie dzieli się przez 3, wynika, iż a nie dzieli

lanie: Jeżeli liczba a dzieli się przez 2 i a dzieli
zieli się przez 7, wynika, iż a dzieli się przez 3.

lanie: Jeżeli nie jest prawdą, że albo prosta L
bo prosta P nie jest równoległa do prostej M,

to albo prosta L nie jest równoległa do prostej M, albo prosta P jest równoległa do prostej M.

1.69. Czy następujące zdanie jest prawdziwe: Jeżeli Jan nie zna Logiki, to, jeśli Jan zna Logikę, to Jan urodził się w IV wieku pne.

1.70. Czy prawdziwe jest zdanie: Jan zna Logikę wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdą, że nie jest prawdą, że Jan zna Logikę.

1.71. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli z faktu, iż funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, wynika, że jest ona ciągła w punkcie x_0, to z faktu, iż funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, wynika, iż jest ona różniczkowalna w punkcie x_0.

1.72. Udowodnić, że jeżeli zdanie p jest fałszywe, to dla każdego zdania q mamy:

a) $p \vee q$ równoważne jest q,
b) $p \wedge q$ równoważne jest p.

1.73. Udowodnić, że jeżeli zdanie p jest prawdziwe, to dla każdego zdania q mamy:

a) $p \wedge q$ równoważne jest q,
b) $p \vee q$ równoważne jest p.

1.74. Przyporządkujmy wartości logicznej 0 liczbę naturalną 0, zaś wartości logicznej 1 liczbę naturalną 1, wtedy funktory logiczne mogą być wyrażone w następujący sposób:

$$\sim p = 1-p, \quad p \wedge q = \min(p, q) = pq,$$

$$p \vee q = \max(p, q) = p+q-pq, \quad p \Rightarrow q = 1-p+pq.$$

Udowodnić, że przy takiej interpretacji wyrażenie jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym układzie wartości przyjmuje wartość 1.

***1.75.** Przyporządkujmy wartości logicznej 1 liczbę naturalną 0, zaś wartości logicznej 0 liczbę 1. Znaleźć analogiczne wyrażenia do rozważanych w zadaniu 1.74. Udowodnić analogiczne twierdzenie (z tym, że zamiast 1 w tezie twierdzenia winno być 0).

1.76. Udowodnić, że jeżeli wyrażenie Ψ jest tautologią, to wyrażenie

$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\Phi_n \Rightarrow \Psi)\ldots)$$

także jest tautologią.