1. $30\sqrt{2}$, 90°, 60 **2.** 24, $\frac{24}{5}$ **3.** 20

4. $\frac{8}{3}\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{17}$, $\frac{2}{3}\sqrt{17}$ **5.** $1:(\sqrt{2}-1)$

6. $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **7.** 5, $3\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$

8. $r=2$, części 10 i 3

9. $d^2(3+2\sqrt{2})$, $4d(\sqrt{2}+1)$ **10.** $2rc$ **11.** $2a$

12. 10, 30. Nie, gdyż przy takich danych wysokość trapezu może być ... również nachylenie jednego ramienia trapezu jest dowolne.

13. $\frac{4}{9}\pi S\sqrt{3}$ **14.** $r=\frac{a}{3}$, stosunek pól 3:2

15. $\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right):\left(\frac{5}{8}\pi+\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$

16. $4\sqrt{6}$ **17.** $0{,}3\sqrt{91}$ **18.** 289, $13\sqrt{2}$

19. H leży na wysokości $\overline{AD}$ w odległości $\frac{7}{4}$ od wierzchołka.

Rozdział XIV

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO

92. Określenie funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

Co to jest trygonometria. Słowo trygonometria jest greckiego pochodzenia i oznacza dosłownie „mierzenie trójkątów". Trygonometria jest działem geometrii. Głównym zadaniem trygonometrii jest rozwiązywanie trójkątów.

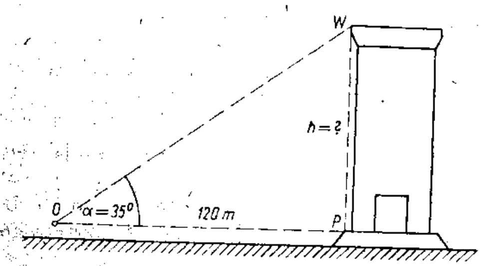
Rozwiązać trójkąt oznacza wyznaczyć wszystkie jego boki i kąty, jeśli są dane niektóre z nich albo pewne związki między nimi.

Głównymi pojęciami trygonometrii są funkcje trygonometryczne. Istnieje sześć funkcji trygonometrycznych; oto ich nazwy i symbole

sinus	sin
cosinus	cos
tangens	tg
cotangens	ctg
secans	sec
cosecans	cosec

Nazwy te są łacińskie i należy je czytać: sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans, kosekans. Oprócz symbolu tg spotyka się symbole: tang, tan; cotangens oznacza się też cot lub ctn; zamiast cosec pisze się też csc.

Oto przykład wyjaśniający genezę funkcji trygonometrycznych.



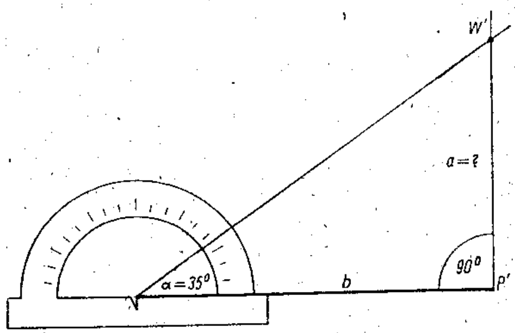
Rys. 92-1

Przykład. Na płaskim terenie stoi wieża (rys. 92-1). Obserwator stojący w odległości 120 m od wieży widzi ją pod kątem 35°. Wyznaczyć wysokość wieży h.

R o z w i ą z a n i e. W trójkącie OPW (O — obserwator, P — punkt u podstawy wieży, W — wierzchołek wieży) dane są: bok $OP = 120$ i dwa kąty przyległe do tego boku o miarach: 35° i 90°. Przykład rozwiążemy wykreślnie, posługując się podobieństwem trójkątów.

Kreślimy trójkąt $O'P'W'$ podobny do trójkąta OPW, obierając dowolną podstawę $O'P' = b$ i kreśląc przy niej kąty o miarach 35° i 90° (rys. 92-2). Z proporcji $h:120 = a:b$ wynika

$$h = 120\,\frac{a}{b}$$



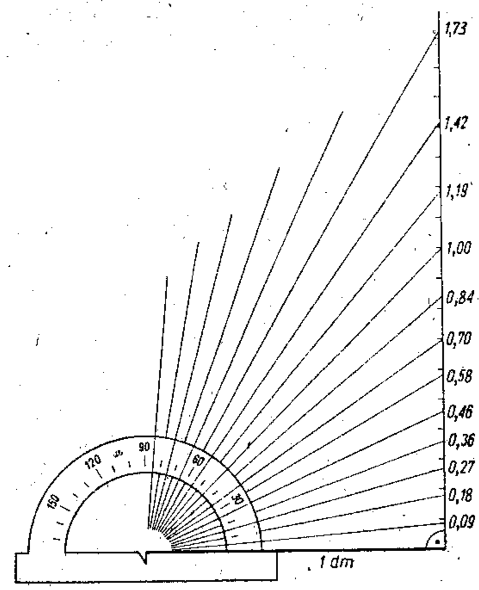
Rys. 92-2

Stosunek $\frac{a}{b}$ jest tu czynnikiem, przez który należy pomnożyć odległość 120 m, aby otrzymać wysokość wieży. Istotne są tu nie odcinki a, b oddzielnie brane, lecz ich stosunek. Pomocniczy trójkąt $O'P'W'$ może mieć dowolną wielkość; jeśli tylko jest podobny do trójkąta OPW, to stosunek $\frac{a}{b}$ mieć będzie zawsze tę samą wartość.

Mierząc odcinki a, b na rysunku 92-2, otrzymujemy $\frac{a}{b} = 0{,}7$, a stąd $h = 120 \cdot 0{,}7 = 84$.

Aby się przygotować do rozwiązywania takim sposobem większej liczby podobnych zadań, można nakreślić wiele trójkątów prostokątnych o rozmaitych kątach ostrych i wyznaczyć wartości stosunku przyprostokątnych dla każdego [illegible]. Jeśli przyprostokątną przyległą do kąta α obierzemy równą 1, to wystarczy zmierzyć drugą przyprostokątną i jej długość jest równa szukanemu stosunkowi [illegible]. Stosunek ten trzeba jakoś nazwać. Nazwano go *tangensem*. Każda z liczb [illegible] wanych na rysunku jest tangensem jakiegoś kąta, np. kątowi 5° odpowiada [illegible] równy 0,09. Wyrażamy to, mówiąc: „tangens kąta 5° równa się 0,09" [illegible]

$$\operatorname{tg} 5° = 0{,}09$$



Rys. 92-3

Tablica 92-1

α	tg α
0	0
5	0,09
10	0,18
15	0,27
20	0,36
25	0,46
30	0,58
35	0,70
40	0,84
45	1
50	1,19
55	1,42
.	.
.	.
.	.

Mówimy też: „Jeśli kąt ma miarę 5°, to tangens tego kąta równa się 0,09", co zapisujemy

$$\alpha = 5° \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = 0{,}09$$

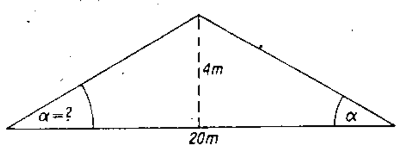
Streszczeniem powyższych rozważań jest następująca definicja:

Tangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi α do przyprostokątnej przyległej do kąta α.

Stosunek ten nie zależy od wielkości trójkąta, a jedynie od kąta α; jest więc funkcją kąta α. Jednak wartość jego wyznacza się za pomocą trójkąta; dlatego nazwano go funkcją trygonometryczną (po grecku *trigonon* — trójkąt).

Tablice trygonometryczne. Wartości tangensa odczytane z rysunku 92-3 można zapisać w postaci tablicy (tabl. 92-1). Z tablicy tej korzystamy w poniższym przykładzie. Obszerniejsze tablice znajdują się w tej książce na str. 261. Dokładniejsze tablice trygonometryczne można nabyć w księgarniach.

Przykład. Rozpiętość dachu dwuspadowego o jednakowym nachyleniu obu połaci wynosi 20 m, a wysokość tego dachu wynosi 4 m (rys. 92-4). Obliczyć kąt nachylenia połaci dachu do poziomu.



Rys. 92-4

Rozwiązanie. Wysokość dachu i połowa rozpiętości — to dwie przyprostokątne w trójkącie o kącie ostrym α. Jest więc

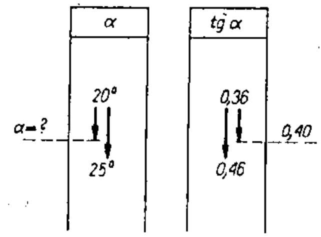
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Teraz patrzymy na tablicę 92-1 i w kolumnie wartości tangensów szukamy pozycji 0,4 = 0,40. Pozycji, dokładnie takiej, nie ma, więc bierzemy tę, która różni się możliwie najmniej, tj. pozycję 0,36. Takiej wartości tangensa odpowiada kąt 20°. A więc odpowiedź nasza, w przybliżeniu bardzo grubym, będzie 20°. Jest to odpowiedź z dokładnością do 5°. Dokładność można powiększyć przez interpolację.

Interpolacja jest to wyznaczenie przybliżonej wartości pośredniej między dwiema wartościami znajdującymi się w tablicy i polega na rozumowaniu, które w zastosowaniu do powyższego przykładu tak przebiega: „Jeśli wartość $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}40$ jest pośrednia między 0,36 i 0,46, to kąt α odpowiadający tej wartości jest kątem pośrednim między 20° i 25°". Rozumowanie takie jest poprawne, jeśli stosujemy je do funkcji monotonicznych. Tangens jest w zakresie kątów ostrych funkcją monotoniczną, a mianowicie rosnącą.

Dla przybliżonego wyznaczenia kąta α stosuje się interpolację liniową, której

istotą jest proporcjonalność różnic (rys. 92-5). Szukana wartość α powinna dzielić różnicę dwóch kolejnych pozycji w kolumnie kątów w takim stosunku, w jakim dana wartość tangensa 0,40 dzieli różnicę dwóch kolejnych pozycji w kolumnie tangensów.



Rys. 92-5

$$(\alpha - 20°) : (25° - 20°) = (0{,}40 - 0{,}36) : (0{,}46 - 0{,}36)$$

Wykonując łatwe rachunki, otrzymujemy $\alpha = 22°$.

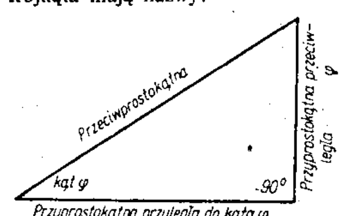
Układanie tablic trygonometrycznych i ich dokładność. Wartości tangensa, które chcieliśmy przedstawić w tablicy 92-1, są prawie wszystkie liczbami niewymiernymi (z wyjątkiem wartości $\operatorname{tg} 0° = 0$ i $\operatorname{tg} 45° = 1$, które są całkowite). Znajdujące się w tej tablicy ułamki dziesiętne są przybliżeniami wartości tangensa z dokładnością do 0,01, co wyrażamy, mówiąc że tablica ta jest „dwucyfrowa".

Jak można zwiększyć dokładność tablic? Staranniejsze kreślenie rysunku i zwiększenie jego rozmiarów niewiele pomoże, gdyż na dużym rysunku i błędy będą większe. Na tej „doświadczalnej" drodze wielkiego sukcesu nie odniesiemy.

Dzięki matematyce wyższej, bez kreślenia, drogą czysto rachunkową (mówimy: *analityczną*) można obliczyć wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych z dowolną dokładnością. Używane są cztero-, pięcio-, sześcio-, a nawet dwunastocyfrowe tablice funkcji trygonometrycznych.

Po tym wprowadzeniu w trygonometrię przystępujemy do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych.

Definicja 92.1 (funkcji trygonometrycznych kąta ostrego). Niech będzie dany dowolny kąt ostry φ. Zbudujmy dowolny trójkąt prostokątny mający kąt ostry φ (rys. 92-6). Boki tego trójkąta mają nazwy:



Rys. 92-6

— przeciwprostokątna,
— przyprostokątna *przyległa* do kąta φ,
— przyprostokątna *przeciwległa* kątowi φ.

Z boków tego trójkąta można utworzyć 6 różnych stosunków. Każdy z tych stosunków stanowi jedną z sześciu funkcji trygonometrycznych kąta ostrego φ, a mianowicie:

sinusem kąta ostrego φ nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi φ do przeciwprostokątnej;

cosinusem kąta ostrego φ nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do kąta φ do przeciwprostokątnej;

tangensem kąta ostrego φ nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi φ do przyprostokątnej przyległej do kąta φ;

cotangensem kąta ostrego φ nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do kąta φ do przyprostokątnej przeciwległej kątowi φ;

secansem kąta ostrego φ nazywamy stosunek przeciwprostokątnej do przyprostokątnej przyległej do kąta φ;

cosecansem kąta ostrego φ nazywamy stosunek przeciwprostokątnej do przyprostokątnej przeciwległej kątowi φ.

Streszczając tę definicję, zapiszemy

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przeciwprostokątna}}\\
\cos\varphi &= \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przeciwprostokątna}}\\
\operatorname{tg}\varphi &= \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przyprostokątna przyległa}}\\
\operatorname{ctg}\varphi &= \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przyprostokątna przeciwległa}}\\
\sec\varphi &= \frac{\text{przeciwprostokątna}}{\text{przyprostokątna przyległa}}\\
\operatorname{cosec}\varphi &= \frac{\text{przeciwprostokątna}}{\text{przyprostokątna przeciwległa}}
\end{aligned} \tag{92.1}$$

Spostrzegamy, że *trzy ostatnie funkcje są odwrotnościami trzech pierwszych*, a mianowicie

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \qquad \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} \tag{92.2}$$

Funkcje będące wzajemnymi odwrotnościami połączono w zapisie (92.1) klamrami. Ułatwi to zapamiętanie powyższych definicji.

Funkcjami sec i cosec nie będziemy się bliżej zajmować.

Oznaczenia standardowe. Aby definicjom i twierdzeniom trygonometrii nadać jak najprostszą postać, wprowadza się następujące oznaczenia:

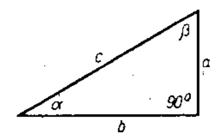
a, b, c — długości boków trójkąta,
α, β, γ — kąty trójkąta,
r — promień koła wpisanego w trójkąt,
R — promień koła opisanego na trójkącie,
S — pole trójkąta,

przy czym:

kąt leżący naprzeciwko boku a oznaczamy α,
kąt leżący naprzeciwko boku b oznaczamy β,
kąt leżący naprzeciwko boku c oznaczamy γ.

Niekiedy dla oznaczenia kątów, zamiast liter greckich, używa się liter A, B, C oznaczających wierzchołki tych kątów.

W trójkącie prostokątnym umawiamy się oznaczać kąt prosty literą γ względnie C, a przeciwprostokątną literą c (rys. 92-7).



Rys. 92-7

Powyższe oznaczenia nazywamy *oznaczeniami standardowymi*.

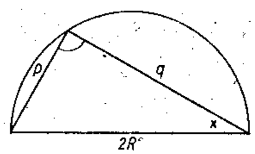
Przy oznaczeniach standardowych w trójkącie prostokątnym mamy

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{a}{c} & \sin\beta &= \frac{b}{c}\\
\cos\alpha &= \frac{b}{c} & \cos\beta &= \frac{a}{c}\\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{a}{b} & \operatorname{tg}\beta &= \frac{b}{a}\\
\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{b}{a} & \operatorname{ctg}\beta &= \frac{a}{b}\\
\sec\alpha &= \frac{c}{b} & \sec\beta &= \frac{c}{a}\\
\operatorname{cosec}\alpha &= \frac{c}{a} & \operatorname{cosec}\beta &= \frac{c}{b}
\end{aligned} \tag{92.3}$$

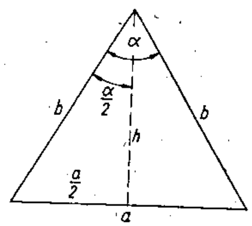
Nie w każdym przypadku można użyć oznaczeń standardowych, ale zawsze trzeba umieć ułożyć stosunek tworzący daną funkcję trygonometryczną. Dlatego na pierwszy plan wysunęliśmy takie sformułowanie definicji funkcji trygonometrycznych, w którym nie korzysta się z oznaczeń standardowych.

Zadanie 1. Trójkąt wpisano w półkole w ten sposób, że średnica jest jego podstawą, a wierzchołek leży na półokręgu (rys. 92-8); wiadomo, że kąt wpisany w półkole jest prosty, zatem trójkąt ten jest prostokątny. Jeden z kątów ostrych oznaczamy x, przyprostokątną leżącą naprzeciw tego kąta oznaczamy p, drugą przyprostokątną q, średnicę półkola $2R$. Ułożyć z boków tego trójkąta stosunki równe poniższym czterem funkcjom trygonometrycznym kąta x

$$\sin x = -,\quad \cos x = -,\quad \operatorname{tg} x = -,\quad \operatorname{ctg} x = -$$



Rys. 92-8



Rys. 92-9

(wpisać ołówkiem właściwe litery, po czym porównać z odpowiedzią na końcu rozdziału).

Zadanie 2. Trójkąt równoramienny ma podstawę a, ramiona b, wysokość h i kąt u wierzchołka α (rys. 92-9). Ułożyć stosunki równe poniższym funkcjom trygonometrycznym

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -,\quad \cos\frac{\alpha}{2} = -,\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -,\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = -$$

93. Funkcje i kofunkcje. Tablice funkcji trygonometrycznych

Funkcje i kofunkcje. Odczytując wzory (92.3), zauważamy, że stosunek $\frac{b}{c}$ występuje tam dwukrotnie: po prawej stronie jako $\sin\beta$ i po lewej stronie jako $\cos\alpha$, zatem $\sin\beta = \cos\alpha$, ale ponieważ $\beta = 90°-\alpha$, więc

$$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$$

Podobnie wyprowadza się związek

$$\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$$

Powyższe związki wyrażamy, mówiąc, że sinus i cosinus są wzajemnymi *kofunkcjami*: sinus jest kofunkcją cosinusa oraz cosinus jest kofunkcją sinusa.

Podobnie ma się rzecz z pozostałymi funkcjami trygonometrycznymi: tangens i cotangens są wzajemnymi kofunkcjami oraz secans i cosecans są wzajemnymi kofunkcjami.

Termin „kofunkcja" oznacza „funkcja kąta dopełniającego" (łac. *complementum* — dopełnienie)

$$\text{cosinus}\,\alpha = \text{sinus complementi}\,\alpha = \sin(90°-\alpha)$$

$$\text{cotangens}\,\alpha = \text{tangens complementi}\,\alpha = \operatorname{tg}(90°-\alpha)$$

Oto wzory wyrażające związki między funkcjami i kofunkcjami

$$\begin{aligned} \sin(90°-\alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90°-\alpha) &= \sin\alpha \\ \operatorname{tg}(90°-\alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(90°-\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned} \tag{93.1}$$

Są to tzw. **wzory redukcyjne dla kąta 90° — α.**

Ze wzorów tych korzysta się przy układaniu tablic. Jeśli bowiem jakimkolwiek sposobem zostały wyznaczone wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów od 0° do 45°, to już nie trzeba trudzić się wyznaczeniem wartości tych funkcji dla kątów od 45° do 90°, gdyż wartości te równają się wartościom kofunkcji dla kątów dopełniających, np.

$$\begin{array}{ll} \sin 89° = \cos 1° & \sin 88° = \cos 2° \quad \text{itd.} \\ \cos 89° = \sin 1° & \cos 88° = \sin 2° \\ \operatorname{tg} 89° = \operatorname{ctg} 1° & \operatorname{tg} 88° = \operatorname{ctg} 2° \\ \operatorname{ctg} 89° = \operatorname{tg} 1° & \operatorname{ctg} 88° = \operatorname{tg} 2° \end{array}$$

Tablice funkcji trygonometrycznych układa się tak, że każda wartość funkcji ma podwójny sens, a mianowicie może być odczytana:

1 — jako wartość pewnej funkcji dla kąta α nie większego od 45°;

2 — jako wartość kofunkcji dla kąta $90°-\alpha$.

Dla przykładu, w tablicy II (str. 261) w kolumnie pod nagłówkiem cos znajduje się pozycja 0,9998; ma ona podwójne znaczenie:

1 — jest to cosinus kąta 1°, jeśli bowiem nazwę funkcji odczytujemy u góry, to kąt należy odczytać z lewej strony,

2 — jest to sinus kąta 89°, jeśli bowiem odczytamy nazwę funkcji u dołu, to jednocześnie należy kąt odczytać z prawej strony.

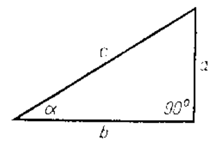
Zadanie 1. Odczytaj z tablicy II i zapisz wartości: sin 16°, sin 74°, cos 21° cos 74°, tg 10°, tg 70°, ctg 20°, ctg 66° i porównaj z odpowiedziami na końcu rozdziału.

94. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych. Logarytmy funkcji trygonometrycznych

Niech będzie dany trójkąt prostokątny z oznaczeniami standardowymi (rys. 94-1). Rozwiązemy sześć zadań wzorcowych odnoszących się do tego trójkąta oraz kilka przykładów liczbowych wprowadzających w praktykę obliczeniową.

Zadanie wzorcowe 1. Dane: a, α; obliczyć b.

Rozwiązanie (rys. 94-1)



Rys. 94-1

Sposób I $\quad \dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha \qquad$ Sposób II $\quad \dfrac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad\qquad b = a\operatorname{ctg}\alpha$$

W praktyce obliczeniowej sposób II jest wygodniejszy, gdyż nie występuje w nim dzielenie.

Przykład liczbowy 1. Wyznaczyć b, jeśli $a = 15$, $\alpha = 24°$.

Rozwiązanie. W tablicy II znajdujemy ctg $24° = 2{,}2460$. Zatem

$$b = a\operatorname{ctg}\alpha = 15 \cdot 2{,}2460 = 33{,}69$$

Przykład liczbowy 2. Wyznaczyć b, jeśli $a = 15$, $\alpha = 62°$.

Rozwiązanie. W tablicy znajdujemy kąt 62° po prawej stronie, wobec tego do kolumn wewnątrz tablicy stosują się teraz napisy umieszczone u dołu. W kolumnie oznaczonej u dołu „ctg" pozycją odpowiadającą kątowi 62° jest 0,5317. Podstawiając znalezione wartości otrzymujemy

$$b = a\operatorname{ctg}\alpha = 15 \cdot 0{,}5317 = 7{,}975$$

Zadanie wzorcowe 2. Dane: a, b; wyznaczyć α.

Rozwiązanie (rys. 94-1)

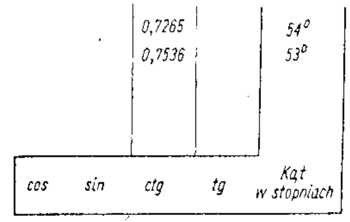
Sposób I $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} \qquad\qquad$ Sposób II $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

W praktyce liczbowej oba sposoby są na ogół równoważne.

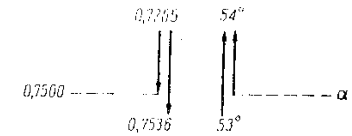
Przykład liczbowy 3. Wyznaczyć α, jeśli $a = 4$, $b = 3$.

Rozwiązanie. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75 = 0{,}7500$. W tablicy II w kolumnie pod nagłówkiem „ctg" szukamy pozycji bliskiej wartości 0,7500, ale nie znajdujemy takiej. Wobec tego przechodzimy do kolumny sąsiedniej, pod którą jest napis „ctg" oznaczający, że znajdujące się w tej kolumnie liczby są cotangensami kątów wypisanych na prawym brzegu tabeli. W kolumnie tej znajdujemy dwie kolejne pozycje wyznaczające przedział obejmujący daną wartość 0,7500. Odpowiadają im kąty 53° i 54° (rys. 94-2). Odpowiedź z dokładnością do 1° brzmi; $\alpha = 53°$.

Aby dać odpowiedź dokładniejszą, stosujemy interpolację. Szukamy wartości α (rys. 94-3), dzielącej różnicę między 53° i 54° w takim stosunku, w jakim wartość 0,7500 dzieli różnicę między pozycjami 0,7536 i 0,7265.



Rys. 94-2



Rys. 94-3

Układamy proporcję różnic, którym zwykle nadaje się poniższe nazwy

$$\underbrace{(0{,}7500 - 0{,}7265)}_{\text{różnica zadaniowa}} : \underbrace{(0{,}7536 - 0{,}7265)}_{\text{różnica tabelowa}} = \underbrace{(\alpha - 54°)}_{\text{poprawka}} : \underbrace{(53° - 54°)}_{\text{krok tabeli}}$$

Oznaczając poprawkę literą x, mamy $\alpha - 54° = x$, czyli $\alpha = 54° + x$. Wyrażając poprawkę oraz krok tabeli w minutach, zaś różnicę zadaniową i tabelową w jednostkach rzędu ostatniej cyfry w tabeli (czyli w tzw. „punktach"; w tabeli 4-cyfrowej punktem jest 0,0001), mamy

$$235 : 271 = x : (-60')$$

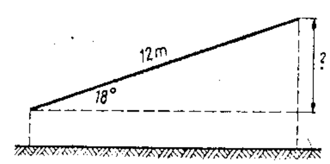
$$\text{Stąd } x = -52', \text{ a więc } \alpha = 54° + x = 54° - 52' = 53°08'$$

Zadanie wzorcowe 3. Dane: c, α; obliczyć a.

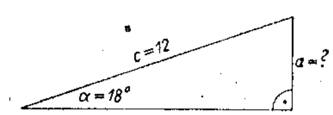
Rozwiązanie (rys. 94-1). Jest $\dfrac{a}{c} = \sin\alpha$, stąd $a = c\sin\alpha$.

Przykład liczbowy 4. Równia pochyła długości 12 m (elewator) jest nachylona do poziomu pod kątem 18°. Obliczyć różnicę wysokości jej końca i początku.

Rozwiązanie. Kreślimy szkic odpowiadający treści zadania (rys. 94-4) oraz trójkąt z oznaczeniami standardowymi, dostosowany do szkicu (rys. 94-5). Jest $\dfrac{a}{c} = \sin\alpha$, stąd $a = c\sin\alpha = 12 \cdot 0{,}3090 = 3{,}71$ m.



Rys. 94-4

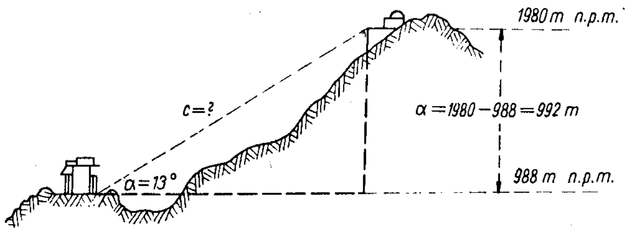


Rys. 94-5

Zadanie wzorcowe 4. Dane: a, α; obliczyć c.

Rozwiązanie (rys. 94-1). Jest $\dfrac{a}{c} = \sin\alpha$, stąd $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Przykład liczbowy 5. Z Kuźnic (988 m nad poziomem morza) widać schronisko na Kasprowym Wierchu (1980 m n.p.m.) pod katem wzniesienia czyli *elewacji* 13°. Obliczyć odległość tych punktów w linii powietrznej (rys. 94-6).



Rys. 94-6

Rozwiązanie. Jest $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, zatem $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{992}{0{,}2250}$. Dla wykonania tego dzielenia zastosujemy logarytmy (tabl. I, str. 259)

$$\begin{array}{rcl} \log\ 992 &=& 2{,}9965 \\ -\log 0{,}2250 &=& -\bar{1}{,}3522 \\ \hline \log c &=& 3{,}6443 \\ c &=& 4409\ \text{m} \end{array}$$

Logarytmy funkcji trygonometrycznych. W ostatnim przykładzie dla wyznaczenia odjemnika $\log\sin 13° = \log 0{,}2250 = \bar{1}{,}3522$ korzystaliśmy najpierw z tablicy II (odczyt $\sin 13° = 0{,}2250$), a potem z tablicy I (odczyt $\log 0{,}2250 = \bar{1}{,}3522$). Był to odczyt pośredni.

Tablica logarytmów funkcji trygonometrycznych (str. 262) umożliwia bezpośredni odczyt wartości logarytmu funkcji trygonometrycznej, gdy kąt jest dany i odwrotnie. Znajdujemy tam bezpośrednio

$$\log\sin 13° = \bar{1}{,}3521$$

Użyteczność takiej tablicy jest oczywista, bowiem logarytmy funkcji trygonometrycznych są w obliczeniach częściej potrzebne niż same funkcje trygonometryczne (te ostatnie, dla odróżnienia, zaopatruje się niekiedy tytułem *„naturalne wartości funkcji trygonometrycznych"*).

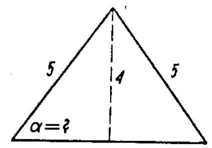
Odczyt bezpośredni może czasem różnić się nieznacznie od odczytu pośredniego. Powyższy przykład został tak dobrany, aby to pokazać: odczyt pośredni $\bar{1}{,}3522$, odczyt bezpośredni $\bar{1}{,}3521$. Różnica taka zdarza się bardzo rzadko, a pochodzi stąd, że prawie wszystkie pozycje w tych tablicach są wartościami przybliżonymi i przy przechodzeniu przez dwie tablice dokładność odczytu maleje. Odczyt bezpośredni jest zwykle dokładniejszy.

Zadanie wzorcowe 5. Dane: a, c; wyznaczyć α.

Rozwiązanie (rys. 94-1): $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Przykład liczbowy 6. W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 5, a wysokość jest równa 4. Wyznaczyć kąt przy podstawie.

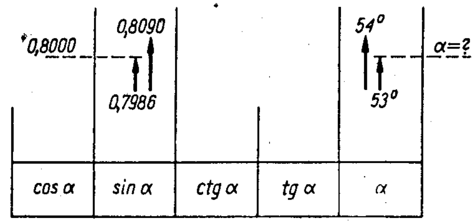
Rozwiązanie (rys. 94-7). $\sin\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8 = 0{,}8000.$



Rys. 94-7

W tablicy II znajdujemy odpowiednie pozycje i układamy proporcję różnic (rys. 94-8)

$$(\alpha' - 53°):(54° - 53°) = (0{,}8000 - 0{,}7986):(0{,}8090 - 0{,}7986)$$



Rys. 94-8

Różnice kątów wyrażamy w minutach: $\alpha - 53° = x$ min, $54° - 53° = 60$ min

$$x:60 = 14:104$$

$$x = \frac{60\cdot 14}{104} = 8\ \text{min}$$

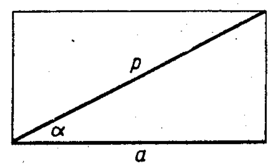
Odp. $\alpha = 53°08'$.

Zadanie wzorcowe 6. Dane: c, α; obliczyć b.

Rozwiązanie (rys. 94-1). Jest $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, zatem $b = c\cos\alpha$.

Przykład liczbowy 7. Obliczyć długość a podstawy prostokąta, jeśli przekątna o długości $p = 5$ tworzy z podstawą kąt $\alpha = 12°$.

Rozwiązanie (rys. 94-9). Oznaczenia nie są standardowe. Jest $\frac{a}{p} = \cos\alpha$, zatem $a = p\cos\alpha = 5\cos 12° = 5\cdot 0{,}9781 = 4{,}8905 = 4{,}890$ (w wyniku zatrzy-



Rys. 94-9

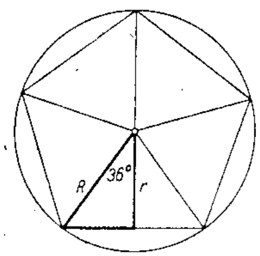
maliśmy tylko 4 cyfry; bowiem korzystając z tablic czterocyfrowych, nie można się spodziewać większej dokładności niż w zakresie 4 cyfr).

Przykład liczbowy 8. Obliczyć promień R koła opisanego na pięciokącie, jeśli promień r koła wpisanego jest dany. Wykonać obliczenie dla $r = 3$.

Rozwiązanie (rys. 94-10). Jest $\frac{r}{R} = \cos 36°$, stąd $R = \frac{r}{\cos 36°} = \frac{3}{\cos 36°}$,

$\log R = \log 3 - \log\cos 36°$

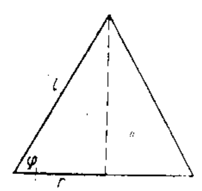
$$\begin{array}{rcl} \log 3 & = & 0{,}4771 \\ -\log\cos 36° & = & -\bar{1}{,}9080 \\ \hline \log R & = & 0{,}5691 \end{array} \qquad R = 3{,}708$$



Rys. 94-10

Przykład liczbowy 9. W stożku zmierzono tworzącą $l = 3{,}8$ cm i średnicę $2r = 4{,}2$ cm. Obliczyć kąt φ nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie (rys. 94-11). W osiowym przekroju stożka dostrzegamy trójkąt prostokątny, w którym $\cos\varphi = \frac{r}{l} = \frac{2{,}1}{3{,}8}$, $\log\cos\varphi = \log r - \log l = \log 2{,}1 - \log 3{,}8 = 0{,}3222 - 0{,}5798 = \bar{1}{,}7424$, $\varphi = 56°28'$.



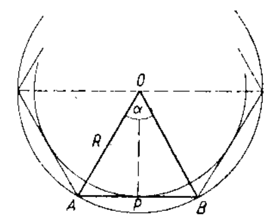
Rys. 94-11

Przykład liczbowy 10. Obliczyć promień r okręgu wpisanego i promień R okręgu opisanego na wielokącie foremnym mającym n boków, jeśli bok a wielokąta jest dany.

Rozwiązanie (rys. 94-12). W trójkącie OAB jest $\alpha = \frac{360°}{n}$, $OA = R$, $OP = r$, $AB = a$. W trójkącie OAP jest

$$\frac{a}{2} : R = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{zatem} \quad R = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$r : \frac{a}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{zatem} \quad r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$



Rys. 94-12

Jeśli z trzech wielkości: R, r, a znamy jedną, to pozostałe dwie możemy wyznaczyć z powyższych związków z dokładnością zależną od posiadanych tablic trygonometrycznych.

Zadania

1. Obliczyć długość cięciwy odpowiadającej w okręgu o średnicy $2r = 10$ kątowi środkowemu 160°.
2. W półkole o średnicy równej 5 wpisano trójkąt w taki sposób, że wierzchołek leży na półokręgu, podstawą jest średnica a wysokość jest równa 2. Wyznaczyć kąty tego trójkąta. Wskazówka: Tw. 88.6.
3. Obliczyć średnicę okręgu wpisanego w romb o boku równym a i kącie ostrym α.
4. Obliczyć promień okręgu wpisanego w deltoid o bokach dłuższych równych a, bokach krótszych równych b i kącie między bokami dłuższymi równym 2α. Wskazówka: Tw. 89.1, p. 14 i 17.
5. W trójkącie równobocznym podzielono jeden bok na trzy równe części i punkty podziału połączono odcinkami z przeciwległym wierzchołkiem, dzieląc kąt u tego wierzchołka na trzy kąty. Wyznaczyć te kąty.
6. Pole trójkąta prostokątnego o kącie ostrym α jest równe S. Obliczyć promień koła opisanego na tym trójkącie.

95. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

Trzy podstawowe tożsamości. Twierdzenie 95.1. Między funkcjami trygonometrycznymi kąta α zachodzą związki

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{95.1}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \qquad (95.2) \quad (95.3)$$

Wzór (95.1) bywa nazywany „wzorem jednostkowym", „jednością trygonometryczną" lub „trygonometrycznym twierdzeniem Pitagorasa".

Ponadto mamy tożsamość

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad (95.4)$$

którą wyprowadziliśmy wprost z definicji (zob. (92.2))

Dowód równości (95.1). W trójkącie prostokątnym zawierającym kąt α przy oznaczeniach standardowych (rys. 94-1) mamy związki

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha \qquad (95.5)$$

Według twierdzenia Pitagorasa jest

$$a^2+b^2 = c^2$$

Dzieląc obie strony przez c^2, dostajemy

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

skąd, po podstawieniu $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, dostajemy (95.1).

Dowód równości (95.2)

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

Dowód równości (95.3) analogiczny.

Obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy wartość jednej z nich jest dana

Zadanie wzorcowe 1. Uważając wartość $\sin\alpha$ za wiadomą, wyrazić przez nią wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego α.

Rozwiązanie. Wartość $\cos\alpha$ wyznaczymy ze wzoru jednostkowego

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Cosinus dowolnego kąta ostrego jest dodatni, więc

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \qquad (95.6)$$

Teraz, korzystając z tego wzoru oraz z (95.2), otrzymamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \qquad (95.7)$$

Wreszcie, korzystając z (95.4), dostajemy

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \qquad (95.8)$$

Przykład liczbowy 1. Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\sin\alpha = 0{,}6$.

Rozwiązanie. Korzystając z (95.6), dostajemy $\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$. Teraz, znając sinus i cosinus, ze wzorów (95.2) i (95.3) dostajemy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3} = 1{,}3333$.

Zadanie wzorcowe 2. Uważając wartość $\operatorname{tg}\alpha$ za wiadomą, wyrazić przez nią wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego.

Rozwiązanie. Przepiszmy tożsamości (95.1) i (95.2), oznaczając znaną wartość $\operatorname{tg}\alpha$ literą m

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1 \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = m$$

Związki te możemy uważać za dwa równania o dwóch niewiadomych: $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$. Wyliczając z drugiego równania

$$\sin\alpha = m\cos\alpha \qquad (95.9)$$

i wstawiając do pierwszego, dostajemy

$$\cos^2\alpha+m^2\cos^2\alpha = 1$$
$$(1+m^2)\cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+m^2}, \text{ stąd } \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+m^2}}$$

Ponieważ funkcje trygonometryczne przyjmują dla kątów ostrych wyłącznie dodatnie wartości, więc należy wziąć znak $+$ i uwzględniając to, że $m = \operatorname{tg}\alpha$, mamy

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \qquad (95.10)$$

Teraz ze związku (95.9) dostajemy

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad (\alpha = \text{kąt ostry}) \qquad (95.11)$$

Cotangens obliczamy ze związku (95.4).

Przykład liczbowy 2. Obliczyć $\sin\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ i kąt α jest ostry.

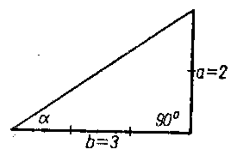
Rozwiązanie

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Konstrukcja kąta ostrego, którego tangens jest dany

Przykład. Nakreślić kąt ostry, którego tangens jest równy $\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie. Należy nakreślić trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne tworzą stosunek 2:3. Można obrać przyprostokątne $a = 2$, $b = 3$ (rys. 95-1). Szukany kąt leży naprzeciw boku o długości 2.



Rys. 95-1

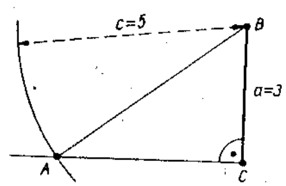
Uwaga (o kojarzeniu obliczeń z konstrukcją). Powyższa konstrukcja wskazuje prosty sposób rozwiązania poprzedniego przykładu liczbowego. Mianowicie obliczamy przeciwprostokątną $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, a znając wszystkie trzy boki trójkąta, dajemy od razu odpowiedź

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$$

Konstrukcja kąta ostrego, którego sinus jest dany

Przykład. Wykreślić kąt ostry α, dla którego jest $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Rozwiązanie. Należy nakreślić trójkąt prostokątny, w którym stosunek przyprostokątnej do przeciwprostokątnej jest równy 3:5. Można przyjąć $a = 3$, $c = 5$. Kreślimy kąt prosty o wierzchołku C (rys. 95-2), na jednym ramieniu odkładamy $a = CB = 3$ i z punktu B kreślimy okrąg o promieniu $c = 5$. Okrąg ten przecina drugie ramię kąta prostego, wyznaczając wierzchołek A szukanego kąta.



Rys. 95-2

Zadanie 1. Uważając wartość $\cos\alpha$ za wiadomą, wyrazić przez nią wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego α.

Zadanie 2. Skonstruować kąt ostry α, którego cosinus jest równy $\frac{5}{6}$. Otrzymany kąt zmierzyć kątomierzem i wynik pomiaru porównać z odpowiednią wartością kąta odczytaną z tablicy.

Zadanie 3. O kącie α wiadomo, że jest ostry i że $\operatorname{ctg}\alpha = 2$. Nakreślić ten kąt. Wyznaczyć jego miarę stopniową z tablicy na podstawie danej wartości cotangensa.

96. Wyznaczenie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60° i 72°

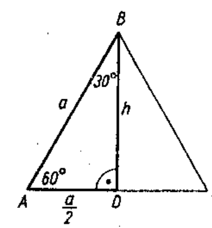
Kąty 30° i 60° znajdują się w trójkącie prostokątnym ADB otrzymanym w wyniku przepołowienia trójkąta równobocznego symetralną boku (rys. 96-1). Jest $AD = \frac{a}{2}$, $AB = a$, $BD = h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (zob. wzór 87.8). Stąd

$$\left.\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \\ \cos 60^\circ &= \end{aligned}\right\} = \frac{AD}{AB} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

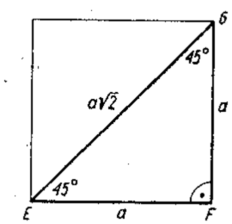
$$\left.\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \\ \sin 60^\circ &= \end{aligned}\right\} = \frac{DB}{AB} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} \qquad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Rys. 96-1



Rys. 96-2

Kąt 45° występuje w trójkącie otrzymanym przez przepołowienie kwadratu przekątną (rys. 96-2). Przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$ (zob. wzór 87.7), zatem

$$\left.\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \\ \cos 45^\circ &= \end{aligned}\right\} = \frac{EF}{EG} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \left.\begin{aligned}\operatorname{tg} 45^\circ &= \\ \operatorname{ctg} 45^\circ &= \end{aligned}\right\} = \frac{EF}{EG} = \frac{a}{a} = 1$$

Otrzymane wyniki przedstawia tablica 96-1.

Czytelnik powinien znać na pamięć tę tablicę. Warto zauważyć, że na podstawie pierwszego jej wiersza można łatwo odtworzyć pozostałe wiersze, mianowicie drugi wiersz zawiera wyrazy pierwszego wiersza ustawione w odwrotnej kolejności, trzeci wiersz wynika z dzielenia wyrazów pierwszego wiersza przez wyrazy drugiego wiersza, a czwarty wiersz zawiera odwrotności wyrazów trzeciego wiersza.

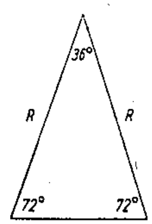
Tablica 96-1

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Kąt 72°. W trójkącie równoramiennym o kątach 36°, 72° i 72° (rys. 96-3) mamy $\cos 72° = \frac{x}{2} : R$. Korzystając ze wzoru (87.19) dostajemy

$$\cos 72° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \tag{96.1}$$

Zadanie 1. Znając wartość cos 72°, obliczyć sin 72° i tg 72°.

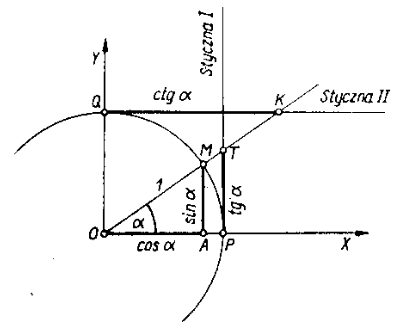


Rys. 96-3

97. Koło trygonometryczne. Przebieg funkcji trygonometrycznych w zakresie kątów ostrych

Koło trygonometryczne. Wartości funkcji trygonometrycznych przedstawiamy w tzw. kole trygonometrycznym (rys. 97-1), które konstruuje się następująco. Kreślimy okrąg o promieniu $r = 1$ i z jego środka O prowadzimy dwie półproste

OX i OY, wzajemnie prostopadłe. Punkty przecięcia półprostych z okręgiem oznaczamy P, Q i kreślimy w tych punktach dwie styczne do okręgu: styczną I przez punkt P i styczną II przez punkt Q.



Rys. 97-1

Jeśli α jest dowolnym kątem ostrym, to odkładamy ten kąt od półprostej OX tak, aby obszar tego kąta zawierał się w obszarze kąta prostego $\sphericalangle XOY$. Wówczas drugie ramię kąta przecina okrąg, styczną I i styczną II w punktach, które oznaczymy M, T i K. Rzut prostokątny punktu M na OX oznaczamy literą A. Przy tych oznaczeniach i przy założeniu $r = 1$ wartości funkcji trygonometrycznych równają się długościom następujących odcinków: $\sin\alpha = AM$, $\cos\alpha = OA$, $\operatorname{tg}\alpha = PT$, $\operatorname{ctg}\alpha = QK$, $\sec\alpha = OT$, $\operatorname{cosec}\alpha = OK$.

Przebieg funkcji trygonometrycznych w zakresie kątów ostrych. Z koła trygonometrycznego łatwo odczytać, że jeśli kąt α rośnie od 0° do 90°, to:

$\sin\alpha$ rośnie od 0 do 1;
$\cos\alpha$ maleje od 1 do 0;
$\operatorname{tg}\alpha$ rośnie od 0 do $+\infty$;
$\operatorname{ctg}\alpha$ maleje od $+\infty$ do 0.

W zakresie kątów od 0° do 90° sinus i tangens są funkcjami *rosnącymi*, zaś cosinus i cotangens — funkcjami *malejącymi*. Sinus i cosinus są funkcjami ograniczonymi (nie przybierają wartości większych od 1), zaś tangens i cotangens są funkcjami nieograniczonymi (przybierają wartości dowolnie duże).

Pytania i zadania

1. Nakreślić trójkąt prostokątny i wprowadzić w nim oznaczenia standartowe. Napisać definicje czterech funkcji trygonometrycznych obydwu kątów ostrych. Porównać z rys. 92-7 i wzorami (92.3).
2. Wypełnić poniższą tabelkę, w której a, b, c, α, β są elementami trójkąta prostokątnego przy oznaczeniach standartowych

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\beta$
4	3									
8	6									
0,8		1								
	12	13								

3. W trójkącie ABC kąt przy A jest prosty, kąt przy B oznaczamy β, zaś D jest rzutem A na BC. Jakim funkcjom kąta β równają się następujące stosunki:

$$\frac{AD}{AB},\ \frac{AD}{DB},\ \frac{AB}{BC},\ \frac{AC}{BC},\ \frac{AC}{AB},\ \frac{AB}{AD},\ \frac{AB}{BD},\ \frac{BD}{DA}$$

$$\frac{AD}{DC},\ \frac{AD}{AC},\ \frac{DC}{AD},\ \frac{DC}{BD}\left(=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{BD}\right),\ \frac{BD}{BC},\ \frac{AD}{BC}$$

4. Dlaczego wartość funkcji trygonometrycznej danego kąta ostrego nie zależy od rozmiarów trójkąta prostokątnego, zawierającego dany kąt ostry, a tylko od wielkości tego kąta?

5. W trójkącie równobocznym i w kwadracie można znaleźć odcinki, których stosunki są wartościami funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45°, i 60°. Wskazać te odcinki, ułożyć odpowiednie stosunki i obliczyć ich wartości. Porównać odpowiedź z tablicą 96-1.

6. Wiedząc, że $\log 2 = 0{,}3010$, a $\log 3 = 0{,}4771$, wyznaczyć logarytmy funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60°. Sprawdzić wyniki w tablicy III.

7. Jakie kąty nazywamy dopełniającymi? Wyznaczyć kąty dopełniające dla kątów 38°, 83°, 30′, 89°50′.

8. Przedstawić: $\sin 81°$, $\cos 50°$, $\operatorname{tg} 72°$ i $\operatorname{ctg} 46°$ w postaci wartości funkcji trygonometrycznych kątów mniejszych od 45°.

9. Wyznaczyć bez pomocy tablic: $\dfrac{\sin 18°}{\cos 72°}$, $\operatorname{tg} 62°\ \operatorname{ctg} 62°$, $\operatorname{tg} 62°\ \operatorname{tg} 28°$.

10. Wyznaczyć kąty dopełniające dla kątów: $\alpha+45°$, $60°-\alpha$, $\alpha-\beta$.

11. Co oznacza termin „kofunkcja"?

12. Przedstawić w postaci wartości kofunkcji kąta dopełniającego:

$$\cos(45°-\alpha),\quad \sin(30°+\alpha),\quad \operatorname{tg}(60°+\alpha)$$

13. Co to znaczy, że funkcja sinus jest rosnąca w I ćwiartce?

14. Co to znaczy, że funkcja cosinus jest malejąca w I ćwiartce?

15. Które funkcje trygonometryczne są w I ćwiartce rosnące, a które malejące?

16. Jaką nierówność spełnia kąt ostry α, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin\alpha < 0{,}5$ b) $\sin\alpha > 0{,}5$ c) $\cos\alpha < 0{,}5$, d) $\cos\alpha > 0{,}5$
e) $\operatorname{tg}\alpha < 1$ f) $\operatorname{ctg}\alpha < 1$ g) $\operatorname{tg}\alpha > 1$ h) $\operatorname{ctg}\alpha > 1$?

17. Bez pomocy tablic określić znak następujących różnic:

$\sin 60° - \sin 40°$, $\cos 70° - \cos 60°$, $\operatorname{tg} 40° - \operatorname{tg} 20°$;
$\operatorname{ctg} 40° - \operatorname{ctg} 30°$, $\operatorname{tg} 50° - \operatorname{ctg} 40°$, $\operatorname{tg} 50° - \operatorname{ctg} 30°$,
$\sin 10° - \cos 80°$, $\sin 10° - \cos 85°$, $\operatorname{tg} 50° - \sin 50°$.

18. Na czym polega interpolacja liniowa?

19. Kiedy poprawka jest dodatnia, a kiedy ujemna?

20. Co to znaczy, że funkcja jest ograniczona?

21. Które funkcje trygonometryczne są ograniczone?

22. Nakreślić kąt, którego tangens równa się 1,5.

23. Czy można nakreślić kąt, którego cosinus równa się 1,5? Czy istnieje taki kąt?

24. Największy dopuszczalny spadek toru kolejowego jest: 10 m w pionie na 1 km w poziomie. Wyznaczyć kąt odpowiadający takiemu spadkowi.

25. Wymienić trzy podstawowe związki między czterema funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego.

26. Jak wyznacza się wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, jeśli jest znana wartość jednej z tych funkcji?

Odpowiedzi do rozdziału XIV

92

1. $\dfrac{p}{2R}$, $\dfrac{q}{2R}$, $\dfrac{p}{q}$, $\dfrac{q}{p}$. **2.** $\dfrac{a}{2b}$, $\dfrac{h}{b}$, $\dfrac{a}{2h}$, $\dfrac{2h}{a}$.

93

1. 0,2756 0,9613 0,9336 0,2756 0,1763 2,7475 2,7475 0,4452.

94

1. 9,848 **2.** 90°, 63°26′, 26°34′. **3.** $a\sin\alpha$. **4.** $\dfrac{a\sin\alpha}{a+b}\left[\sqrt{b^2-a^2\sin^2\alpha}+a\cos\alpha\right]$.

5. 19°07′, 21°46′, 19°07′. **6.** $\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\cos\alpha}}$.

95

1. $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$.

2. Kreślimy odcinek $AC=b=5$. W punkcie C wystawiamy prostopadłą, z punktu A zakreślamy okrąg promieniem równym 6. W przecięciu otrzymujemy punkt B. Mierząc kątomierzem kąt CAB znajdujemy w przybliżeniu 33°. Aby wyznaczyć ten kąt z tablic, przedstawiamy daną wartość cosinusa w postaci ułamka dziesiętnego $\cos\alpha=\frac{5}{6}=0{,}8333$. W tablicy znajdujemy dwie pozycje: 0,8387 i 0,8290. Bierzemy mniejszą z nich, jako podstawę odczytu. Odpowiada jej wartość 34°. Z proporcji różnic

$$\underbrace{(\alpha-34°)}_{x}:(33°-34°) = (8333-8290):(8387-8290)$$

otrzymujemy $x = -26$. Zatem $\alpha = 34°+x = 34°-26' \doteq 33°34'$.

3. $\alpha = 26°35'$.

96

1. $\sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg} 72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

97

2.

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\beta$
4	3	5	0,8	0,6	1,33	0,75	0,6	0,8	0,75	1,33
8	6	10	0,8	0,6	1,33	0,75	0,6	0,8	0,75	1,33
0,8	0,6	1	0,8	0,6	1,33	0,75	0,6	0,8	0,75	1,33
5	12	13	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{12}$

3. $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta$, $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{cosec}\beta$, $\sec\beta$, $\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}^2\beta$, $\cos^2\beta$, $\sin\beta\cos\beta$.

4. Trójkąty prostokątne, zawierające dany kąt ostry, są podobne. W trójkątach podobnych stosunki odpowiednich boków są równe.

7. 52°, 7°, 89°30', 10'.

8. $\cos 9°$, $\sin 40°$, $\operatorname{ctg} 18°$, $\operatorname{tg} 44°$.

9. 1, 1, 1.

10. $45°-\alpha$, $30°+\alpha$, $90°-\alpha+\beta$.

12. $\sin(45°+\alpha)$, $\cos(60°-\alpha)$, $\operatorname{ctg}(30°-\alpha)$.

13-15. W zakresie kątów od 0° do 90°

sinus i tangens są rosnące

tzn. przy zwiększaniu kąta od 0° do 90° funkcje te przybierają coraz większe wartości, natomiast

cosinus i cotangens są malejące

tzn. przy zwiększaniu kąta od 0° do 90° funkcje te przybierają coraz mniejsze wartości. Dla przykładu w tablicy II znajdujemy

Kąt	sin	cos	tg	ctg
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626
wzrost	wzrost	spadek	wzrost	spadek

Zauważmy, że w zakresie 0°—90° malejące są funkcje, których nazwy zaczynają się od przedrostka „co" (czytaj: ko), pozostałe są rosnące.

16. a) $\alpha < 30°$, b) $\alpha > 30°$, c) $\alpha > 60°$, d) $\alpha < 60°$, e) $\alpha < 45°$, f) $\alpha > 45°$, g) $\alpha > 45°$, h) $\alpha < 45°$.

17. +, −, +, −, 0, −, 0, +, +.

19. Przy interpolacji istotne jest rozeznanie, czy dana funkcja jest rosnąca czy malejąca. Za podstawę odczytu przyjmujemy z reguły mniejszą z dwóch wartości tabelowych, między którymi zawiera się dana wartość zadaniowa. Wykonujemy odczyt odpowiadający tej mniejszej wartości tabelowej i z proporcji różnic obliczamy poprawkę. W przypadku sinusa i tangensa poprawka jest dodatnia, zaś w przypadku cosinusa i cotangensa poprawka jest ujemna.

23. Nie, taki kąt nie istnieje. **24.** $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}01$; $\alpha \approx 35'$.

Rozdział XV

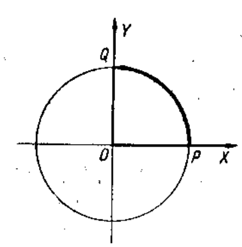
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA SKIEROWANEGO

98. Kąt skierowany na płaszczyźnie zorientowanej

Układy prawoskrętne i układy lewoskrętne. Zorientowanie płaszczyzny (str. 80) polega na ustaleniu dodatniego obiegu dla wszystkich okręgów tej płaszczyzny. Każda płaszczyzna może być zorientowana na dwa, wzajemnie przeciwne, sposoby. Inaczej mówiąc: Istnieją dwie, wzajemnie przeciwne, orientacje płaszczyzny.

Wyróżnienie jednej z tych orientacji za pomocą środków czysto matematycznych nie jest możliwe, lecz wymaga odwołania się do jakiegoś wzorca konkretnego (poza matematycznego). Wzorcem takim, związanym z układem Ziemia-Słońce, dla naszych szerokości geograficznych, może być ruch cienia na płaszczyźnie zegara słonecznego. Innym wzorcem może być ruch wskazówek zegara przyłożonego do płaszczyzny rysunku tak, aby tarcza była zwrócona w stronę patrzącego na rysunek; wówczas o jednej orientacji płaszczyzny można powiedzieć, że jest zgodna z obiegiem wskazówek, a o drugiej, że jest przeciwna do obiegu wskazówek zegara.

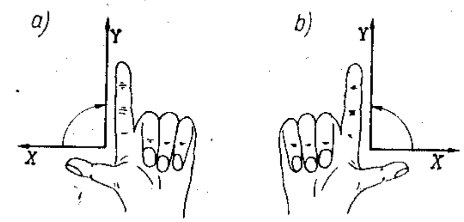
Orientację płaszczyzny można też określić przez wybór układu współrzędnych prostokątnych na tej płaszczyźnie. Niech OXY będzie obranym przez nas układem prostokątnym (rys. 98-1) i rozważmy okrąg c o środku O oraz łuk skierowany $\overset{\frown}{PQ}$



Rys. 98-1

tego okręgu odpowiadający kątowi prostemu POQ, przy czym niech P leży na dodatniej półosi pierwszej, a Q — na dodatniej półosi drugiej tego układu. Przyjmujemy umowę, że ten obieg okręgu c jest dodatni, w którym łuk $\overset{\frown}{PQ}$ ma zwrot dodatni. W ten sposób można nadać okręgowi c obieg dostosowany do danego układu prostokątnego. Jak wiemy, wybór dodatniego obiegu na jednym okręgu wyznacza orientację dla całej płaszczyzny, a więc zorientowanie płaszczyzny sprowadza się do wyboru układu prostokątnego na tej płaszczyźnie. Płaszczyznę, którą zorientowano przez wybranie na niej prostokątnego układu współrzędnych OXY, będziemy nazywać krótko: płaszczyzną OXY.

Każde dwa układy prostokątne na danej płaszczyźnie są wzajemnie przystające. Jeśli przystawanie układów prostokątnych OXY i $O'X'Y'$ będziemy rozumieć w ten sposób, że w przystawaniu tym mają przystawać: półoś dodatnia OX do półosi dodatniej $O'X'$ oraz półoś dodatnia OY do półosi dodatniej $O'Y'$, to układy te mogą być przystające albo wprost albo odwrotnie. Na rys. 98-2 pokazano dwa układy przystające odwrotnie.



Rys. 98-2. Układy prostokątne na płaszczyźnie: a) układ lewoskrętny, b) układ prawoskrętny. Łuk ze strzałką wskazuje orientację płaszczyzny zgodną z danym układem

Wszystkie układy prostokątne na danej płaszczyźnie dzielą się na dwie klasy takie, że:

— dwa układy należące do tej samej klasy są przystające wprost,
— dwa układy należące do różnych klas są przystające odwrotnie.

Jednakowoż, w ramach matematyki nie ma sposobu wyróżnienia jednej z tych dwóch klas układów. I znów trzeba odwołać się do konkretnego wzorca poza matematycznego, np. do kształtu dłoni ludzkiej, przyłożonej grzbietem do płaszczyzny rysunku. Wtedy można umówić się, który układ nazwiemy prawoskrętnym, a który — lewoskrętnym.

Umowa. W dalszym ciągu będziemy posługiwać się układem prawoskrętnym, tj. takim jak na rys. 98-2b. Z umowy tej wynika, że obieramy orientację płaszczyzny przeciwną do obiegu wskazówek zegara.

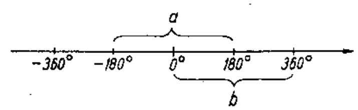
Miara stopniowa kąta skierowanego. Z definicji 82.2 wynika, że każdy kąt skierowany, niezerowy i niepółpełny, położony na płaszczyźnie zorientowanej ma jednoznacznie określoną rozwartość i zwrot. Rozwartość wyrażona w stopniach jest liczbą należącą do przedziału $\langle 0; 180 \rangle$. Kąt zerowy ma rozwartość 0°, kąt półpełny ma rozwartość 180°. Zwrot kąta skierowanego wyraża się znakiem „plus" albo „minus". Kat zerowy i kąt półpełny nie mają zwrotów. Rozwartość i zwrot pozwalają określić miarę kąta skierowanego.

Definicja 98.1 (miary głównej kąta). *Miarą główną kąta skierowanego, niezerowego, i niepółpełnego, nazywamy rozwartość tego kąta wziętą ze znakiem „plus", gdy zwrot kąta jest dodatni, względnie ze znakiem „minus", gdy zwrot kąta jest ujemny.*

Miarą główną kąta skierowanego zerowego nazywamy liczbę 0.

Miarą główną kąta skierowanego półpełnego nazywamy rozwartość tego kąta wziętą ze znakiem „plus".

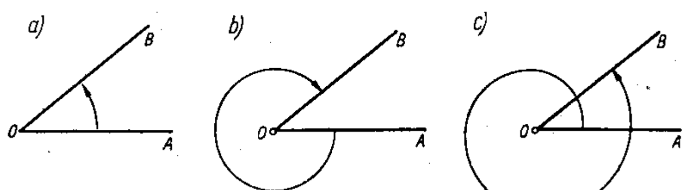
Każdy kąt skierowany ma jednoznacznie określoną miarę główną, która wyrażona w stopniach jest liczbą należącą do przedziału $(-180; 180\rangle$. Oczywiście, można też określić miarę główną kąta tak, aby była liczbą zawartą w przedziale $\langle 0; 360)$ (rys. 98-3). Każdy z tych sposobów ma swe zalety. Jednakowoż, w zbiorze



Rys. 98-3. Zbiór wartości miary głównej kąta skierowanego: a) według definicji 98.2, b) według książki Straszewicza, Matematyka dla kl. III lic. og.

kątów skierowanych nie można zdefiniować miary jednoznacznej tak, żeby miara sumy kątów była równa sumie ich miar. Jeśli bowiem miarą kąta skierowanego prostego jest jakaś liczba $\omega \neq 0$, to ponieważ suma czterech takich kątów i tak samo suma ośmiu takich kątów są kątami zerowymi, więc musiałaby zachodzić równość $4\omega = 8\omega$ sprzeczna z założeniem $\omega \neq 0$.

Dlatego oprócz miary głównej kąta wprowadza się pojęcie miary wieloznacznej kąta. Miara główna kąta jest odzwierciedleniem obrotu rozumianego jako przekształcenie geometryczne, natomiast miara wieloznaczna kąta jest odzwierciedleniem obrotu rozumianego jako zjawisko fizyczne (str. 79). Jak wiemy z fizyki, to samo przemieszczenie może być wynikiem różnych ruchów (rys. 98-4).



Rys. 98-4. Różne obroty odpowiadające temu samemu kątowi skierowanemu AOB: a) 40°, b) −320°, c) 400°

Definicja 98.2 (miary wieloznacznej kąta). *Miarą kąta skierowanego na płaszczyźnie zorientowanej nazywamy każdą z liczb, które otrzymamy dodając do miary głównej tego kąta jakąkolwiek całkowitą wielokrotność miary kąta pełnego.*

Jeśli α_0 jest miarą główną pewnego kąta skierowanego, wyrażoną w stopniach, to stopniowa miara (wieloznaczna) tego kąta wyraża się wzorem

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360 \qquad (k - \text{dowolna liczba całkowita})$$

Każdy kąt skierowany na płaszczyźnie zorientowanej ma nieskończenie wiele miar; są wśród nich dodatnie i ujemne, a każde dwie z nich różnią się o pewną wielokrotność miary kąta pełnego. Jedna z miar kąta zerowego jest równa 0. O mierze głównej dowolnego kąta niepółpełnego można powiedzieć, że jest to ta z miar danego kąta, która ma najmniejszą wartość bezwzględną.

Jeśli jest dana jedna z miar stopniowych pewnego kąta skierowanego, to wszystkie pozostałe miary stopniowe tego kąta otrzymamy, dodając do danej miary dowolne całkowite wielokrotności liczby 360. Naodwrót, odejmując od danej miary stopniowej kąta pewną całkowitą wielokrotność liczby 360, otrzymamy główną miarę stopniową tego kąta.

Przykład. Wyznaczyć główną miarę stopniową α_0 kąta, jeśli jedna z miar stopniowych tego kąta równa się: a) 1000; b) −1000.

Rozwiązanie: a) $1000 = 360+360+360-80$, $\alpha_0 = -80$;
b) $-1000 = -360-360-360+80$, $\alpha_0 = 80$.

Umowa. Jeśli kąt skierowany oznaczono symbolem $\vec{\alpha}$, to miarę tego kąta oznaczamy literą α. Ponieważ znajomość miary kąta skierowanego pozwala wyznaczyć ten kąt (jako swobodny kąt skierowany na danej płaszczyźnie zorientowanej), więc dla uproszczenia licznych wzorów trygonometrii zamiast pisać „kąt skierowany $\vec{\alpha}$, którego miarą jest α" będziemy pisać krótko

kąt α

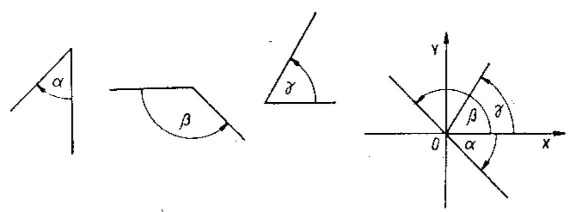
Zamiast mówić „kąt skierowany, który wśród swych miar stopniowych ma miarę równą α" powiemy krótko

kąt α stopni

Aby wyznaczyć dany kąt skierowany swobodny nie ma potrzeby podawania wszystkich miar tego kąta, lecz wystarczy podać jedną z nich. Powiedzenie„ kąt 40°" określa na danej płaszczyźnie zorientowanej dokładnie ten sam swobodny kąt skierowany, co każde z powiedzeń: „kąt 400°", „kąt 760°", „kąt −320°" i „kąt $40° + k \cdot 360°$, gdzie k jest liczbą całkowitą".

Powiedzenie „Kąt α rośnie od 0° do 90°" będzie mieć następujący sens: Kąt $\vec{\alpha}$ zmienia się w ten sposób, że jedna z jego miar stopniowych rośnie w sposób ciągły od 0° do 90°.

Standardowe położenie kąta. Jeśli kąt skierowany jest położony na płaszczyźnie OXY w ten sposób, że jego wierzchołek leży w początku układu, a ramię początkowe pokrywa się z dodatnią półosią OX, to mówimy, że kąt ten jest w położeniu standardowym względem układu OXY (rys. 98-5). Kąty, które mają miary stopniowe należące do przedziałów (0; 90), (90; 180), (180; 270), (270; 360) nazywamy odpowiednio kątami I, II, III, IV ćwiartki.

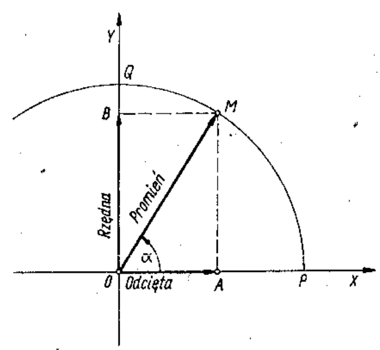


Rys. 98-5. Kąty skierowane w położeniu dowolnym i w położeniu standardowym

Wektor wodzący i jego współrzędne. Rozważmy na płaszczyźnie OXY wektor

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

Wektor ten nazywamy *wektorem wodzącym* punktu M, a jego długość r *promieniem wodzącym* punktu M. Załóżmy, że $r = \text{const} > 0$; wówczas M leży na okręgu $o(O, r)$. Niech α będzie miarą kąta skierowanego $\sphericalangle \overline{XOM}$ utworzonego przez dodatnią półoś OX i wektor $\overrightarrow{OM}$ (rys. 98-6). Rzutując wektor $\overrightarrow{OM}$ na osie układu,



Rys. 98-6

otrzymujemy dwa wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, składowe wektora $\overrightarrow{OM}$. Miary względne tych wektorów, brane względem osi, na której każdy z tych wektorów leży, oznaczamy literami x i y

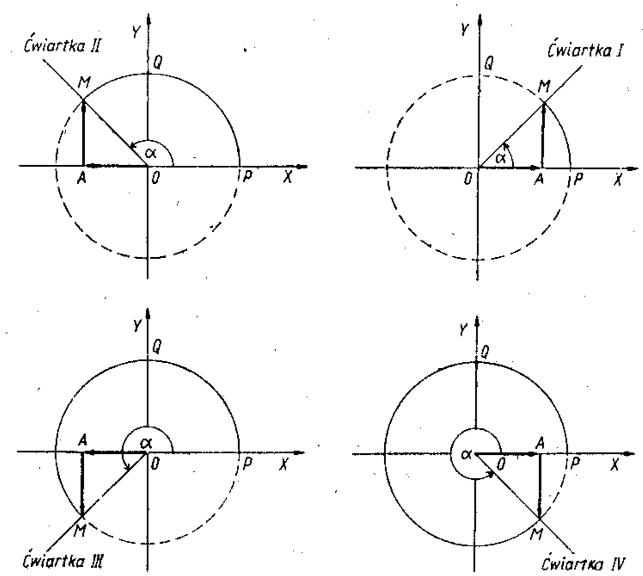
$$x = \text{miara}\,\overrightarrow{OA} \qquad y = \text{miara}\,\overrightarrow{OB}$$

i nazywamy współrzędnymi wektora $\overrightarrow{OM}$. Liczbę x nazywamy *odciętą*, a liczbę y — *rzędną wektora* $\overrightarrow{OM}$. Liczby te są jednocześnie współrzędnymi punktu M.

Jeśli α rośnie od 0° do 90°, to wektor $\overrightarrow{OM}$ wykonuje obrót od dodatniej półosi OX przez I ćwiartkę płaszczyzny do dodatniej półosi OY; współrzędne x i y są dodatnie, przy czym x maleje od r do 0, zaś y rośnie od 0 do r. Rys. 98-7 i tablica 98-1 pokazują znak i charakter zmienności odciętej i rzędnej, gdy α rośnie w zakresie poszczególnych ćwiartek płaszczyzny OXY (↗ oznacza wzrost, ↘ oznacza zmniejszanie się).

Tablica 98-1

Kąt α	0°	Ćwiartka I	90°	Ćwiartka II	180°	Ćwiartka III	270°	Ćwiartka IV	360°
Odcięta x	r	+ + + + ↘	0	− − − − ↘	$-r$	− − − − ↗	0	+ + + + ↗	r
Rzędna y	0	+ + + + ↗	r	+ + + + ↘	0	− − − − ↘	$-r$	− − − − ↗	0



Rys. 98-7. Znaki współrzędnych w poszczególnych ćwiartkach płaszczyzny OXY

Kąt a miara kąta. W praktyce szkolnej spotykamy niekiedy zadania, których sformułowanie, gwoli krótkości, jest takie, że pozostawia pewien margines domyślności, a co za tym idzie, pewną dowolność interpretacji tematu. To z kolei powoduje, że dopuszczalne będą odpowiedzi różniące się między sobą. Różnice takie mogą wystąpić na przykład wtedy, gdy w zadaniu nie sprecyzowano, czy chodzi o kąt (twór geometryczny), czy o miarę kąta (liczbę). Wyjaśnimy to na przykładach, w których korzystać będziemy z oznaczeń przyjętych na rys. 98-6 i 98-7.

Przykład 1. Kiedy rzędna punktu M jest równa promieniowi wodzącemu? Pytanie to jest sformułowane ogólnie i można dać na nie odpowiedź:

— „Wtedy i tylko wtedy, gdy punkt M leży na dodatniej półosi rzędnych".

Pytanie to można sprecyzować na dwa sposoby: a) pytając się o kąt; b) pytając się o miarę kąta. W pierwszym przypadku mamy pytanie: „Dla jakiego kąta $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$ rzędna punktu M jest równa promieniowi wodzącemu?" i odpowiedź: „Jedynym kątem o tej własności jest kąt o mierze 90°". W drugim przypadku na pytanie: „Dla jakich miar α kąta $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$ rzędna punktu M jest równa promieniowi wodzącemu?" dajemy odpowiedź: „Dla $\alpha = 90°+k\cdot 360°$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą".

Przykład 2. a) Dla jakich kątów $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$ odcięta punktu M jest zerem? b) Dla jakich miar kąta $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$ odcięta punktu M jest zerem?

Odp. a) Istnieją dokładnie dwa takie kąty: $+90°$ i $-90°$.

b) Miary tych kątów wyrażają się wzorami

$$90°+k\cdot 360° \qquad -90°+k\cdot 360°$$

co można wyrazić jednym wzorem

$$90°+k\cdot 180°$$

gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą.

Przykład 3. a) Dla jakich kątów $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$ rzędna punktu M jest dodatnia? b) Wyznaczyć miary tych kątów.

Odp. a) Są to kąty o zwrocie dodatnim.

b) Miary główne tych kątów są wyznaczone warunkiem

$$0° < \alpha < 180°$$

Miary wieloznaczne tych kątów są wyznaczone warunkiem

$$k\cdot 360° < \alpha < 180°+k\cdot 360°$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, co można też zapisać w postaci

$$2k\cdot 180° < \alpha < (2k+1)\cdot 180°$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Pytania i zadania

1. Czym różnią się między sobą następujące dwa pojęcia:
a) oś — prosta;
b) wektor — odcinek;
c) równość wektorów — równość odcinków;
d) płaszczyzna zorientowana — płaszczyzna niezorientowana;
e) kąt skierowany — kąt nieskierowany?

2. Co to jest miara względna wektora leżącego na osi lub równoległego do tej osi?

3. Co to jest miara kąta skierowanego, leżącego na płaszczyźnie zorientowanej? Ile miar ma każdy kąt skierowany?

4. Czy wśród kątów skierowanych istnieje największy? Który z kątów nieskierowanych jest największy?

5. Jak dodaje się do siebie dwa wektory:
a) równoległe i zgodnie skierowane;
b) równoległe i przeciwnie skierowane;
c) nierównoległe?

6. W jaki sposób wyznacza się rzuty wektora w układzie rzutowania:
a) prostokątnym; b) ukośnokątnym (zobacz rozwiązanie zad. 7)?

7. W punkcie A poziomej osi p zaczepiony jest wektor $\vec{F}$, tworzący z osią p kąt $+60°$. Przez punkt A przeprowadzono drugą oś d, która z osią p tworzy kąt φ. Rozłożyć wektor $\vec{F}$ na składowe leżące na osiach p i d w przypadkach:

a) $\varphi = +90°$, b) $\varphi = +120°$, c) $\varphi = +45°$.

8. Jakie czynności należy wykonać, aby wprowadzić na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych? Jak określa się współrzędne dowolnego punktu tej płaszczyzny?

9. W której ćwiartce płaszczyzny leży punkt: $A(2, -2)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 4)$, $D(-5, -3)$?

10. Co można powiedzieć o współrzędnych punktu leżącego: a) na osi Ox; b) na osi Oy; c) w I i II ćwiartce; d) w I i IV ćwiartce; e) w I i III ćwiartce; f) na dwusiecznej I ćwiartki; g) na dwusiecznej II ćwiartki?

11. Gdzie leży punkt, jeśli a) odcięta jest dodatnia, a rzędna ujemna? b) odcięta 0, a rzędna ujemna?

12. Dany jest punkt $A(3, 2)$. Wyznaczyć współrzędne: punktu B symetrycznego do A względem 0; punktu C symetrycznego do A względem Ox; punktu D symetrycznego do A względem Oy.

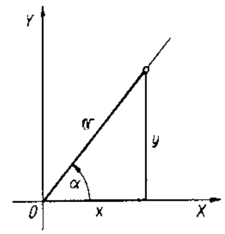
13. Obliczyć odległości punktów: $A(3, 4)$, $B(6, 8)$, $C(2, -3)$, $D(4, 0)$, $E(-12, -9)$, $F(0, 5)$ od początku układu współrzędnych.

14. Czy wektor $\overrightarrow{OM}$ będzie na płaszczyźnie OXY jednoznacznie określony, jeśli zostaną podane jego:
a) obie współrzędne prostokątne (odcięta i rzędna);
b) długość;
c) długość i odcięta;
d) długość i kąt skierowany (od $\overrightarrow{OX}$ do $\overrightarrow{OM}$);
e) odcięta i kąt skierowany (od $\overrightarrow{OX}$ do $\overrightarrow{OM}$)?

15. Jak zmieniają się odcięta i rzędna wektora $\overrightarrow{OM}$, gdy wektor ten obraca się na płaszczyźnie OXY w kierunku dodatnim, nie zmieniając swej długości?

99. Określenie funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego

Definicja 99.1. Niech będzie dany na płaszczyźnie OXY dowolny kąt skierowany o mierze α. Sprowadzając ten kąt do położenia standardowego (rys. 99-1) i oznaczając literą M dowolny punkt leżący na końcowym ramieniu kąta i różny od wierzchołka kąta, otrzymujemy kąt $\sphericalangle\ \overrightarrow{XOM}$ o mierze α, który w dalszym ciągu będziemy nazywać kątem α.



Rys. 99-1

Oznaczając literami x, y, r odciętą, rzędna i promień wodzący punktu M, określamy funkcje trygonometryczne kąta α następującymi równościami

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \tag{99.1}$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}$$

W zakresie kątów I ćwiartki powyższa definicja pokrywa się z definicją 92.1, jest więc jej uogólnieniem. Równości (99.1) można zapisać w postaci analogicznej do (92.1)

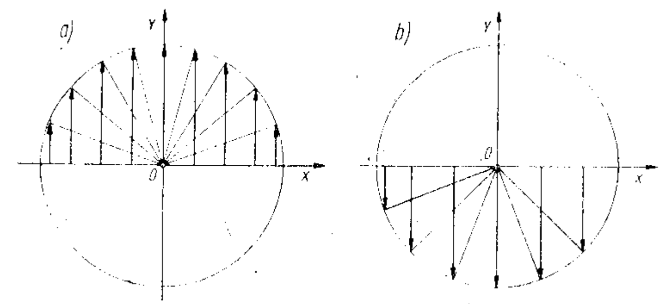
$$\sin\alpha = \frac{\text{rzędna}}{\text{promień}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{odcięta}}{\text{promień}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{rzędna}}{\text{odcięta}} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{odcięta}}{\text{rzędna}}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{promień}}{\text{odcięta}} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{promień}}{\text{rzędna}}$$

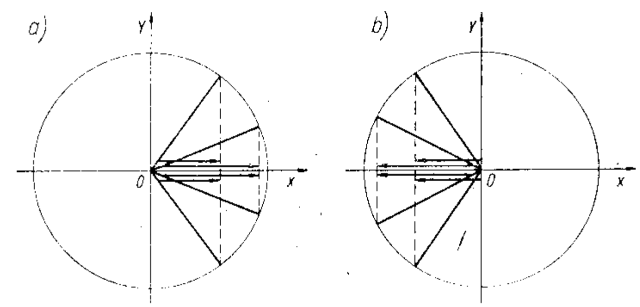
Określoność funkcji trygonometrycznych. Sinus i cosinus są określone dla wszystkich bez wyjątku kątów, gdyż $r \neq 0$. Pozostałe funkcje trygonometryczne są nieokreślone dla pewnych kątów, a mianowicie wtedy, gdy mianownik w ułamku określającym daną funkcję staje się równy zeru. Tangens i secans tracą sens, gdy $x = 0$, tj. dla kątów $+90°$ i $-90°$. Cotangens i cosecans tracą sens, gdy $y = 0$, tj. dla kątów $0°$ i $180°$. Funkcjami sec i cosec nie będziemy się zajmować.

Znak funkcji trygonometrycznych. Funkcja sinus przybiera wartości takiego znaku, jaki jest znak rzędnej (rys. 99-2), a więc przybiera wartości dodatnie w I i II ćwiartce i ujemne w III i IV ćwiartce.



Rys. 99-2. ab

Funkcja cosinus przybiera wartości takiego znaku, jaki jest znak odciętej (rys. 99-3), a więc przybiera wartości dodatnie w I i IV ćwiartce oraz wartości ujemne w II i III ćwiartce.



Rys. 99-3. ab

Posługując się pojęciami rozwartości i zwrotu kąta skierowanego, powiemy, że:

— znak sinusa jest taki, jak zwrot kąta;

— znak cosinusa jest związany z rozwartością kąta, a mianowicie cosinus jest dodatni dla kątów o rozwartości mniejszej od 90° i ujemny dla kątów o rozwartości większej od 90°.

Funkcje tangens i cotangens przybierają wartości dodatnie, gdy x i y są tego samego znaku, tj. w I i III ćwiartce oraz wartości ujemne, gdy x i y są przeciwnych znaków, tj. w II i IV ćwiartce.

Tablica 99-1 zawiera zestawienie powyższych wiadomości. Znak * oznacza, że dla danego kąta funkcja jest nieokreślona. (Ponieważ dla kątów bliskich tym kątom funkcje tg i ctg przybierają wartości bezwzględne dowolnie duże, więc w wielu książkach znajdziemy w tych miejscach znak nieskończoności ∞).

Tablica 99-1

Kąt α	0°	Ćwiartka I	90°	Ćwiartka II	180°	Ćwiartka III	270°	Ćwiartka IV	360°	Ćwiartka I	360°+90°	Ćwiartka II	360°+180°	Ćwiartka III
$\sin\alpha$	0	+ + + ↗	1	+ + + ↘	0	− − − ↘	−1	− − − ↗	0	przy dalszym wzroście miary końcowe ramię kąta przebiega ponownie ćwiartki I−IV i funkcje trygonometryczne doznają ponownie tych samych zmian				
$\cos\alpha$	1	+ + + ↘	0	− − − ↘	−1	− − − ↗	0	+ + + ↗	1					
$\operatorname{tg}\alpha$	0	+ + + ↗	*	− − − ↗	0	+ + + ↗	*	− − − ↗	0					
$\operatorname{ctg}\alpha$	*	+ + + ↘	0	− − − ↘	*	+ + + ↘	0	− − − ↘	*					

100. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta skierowanego

Trzy podstawowe tożsamości. Twierdzenie 100.1. *Między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta skierowanego zachodzą związki*

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \tag{100.1}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha \qquad (100.2)\ (100.3)$$

Wzór (100.1) *jest prawdziwy dla wszystkich kątów skierowanych. Wzory* (100.2) i (100.3) *są prawdziwe dla tych kątów, dla których tangens względnie cotangens są określone.*

Wzór (100.1) bywa nazywany „wzorem jednostkowym", „jednością trygonometryczną", lub „trygonometrycznym twierdzeniem Pitagorasa". Wzór (100.2) wyraża tangens jako stosunek sinusa do cosinusa, wzór (100.3) wyraża cotangens jako stosunek cosinusa do sinusa.

Dowód wzoru (100.1). Między x, y, r (rys. 99-1) zachodzi związek $x^2+y^2=r^2$. Dzieląc tę równość przez r^2 i uwzględniając definicje (99.1) otrzymujemy (100.1).

Dowód wzoru (100.2). $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{y}{r}:\dfrac{x}{r}=\dfrac{y}{r}\cdot\dfrac{r}{x}=\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha$

Dowód wzoru (100.3) analogiczny.

Z powyższych trzech podstawowych tożsamości można łatwo wyprowadzić parę dalszych tożsamości, np.

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1 \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy wartość jednej z nich jest dana. Tożsamości (100.1), (100.2), (100.3) pozwalają wyznaczyć bezwzględną wartość funkcji trygonometrycznych, ale dla określenia znaków potrzebna jest dodatkowa informacja o kącie α, wskazująca do której ćwiartki należy ten kąt.

Przykład 1. Wyznaczyć $\cos\alpha$, jeśli jest dana wartość $\sin\alpha$.

Rozwiązanie. Z „jedności trygonometrycznej" otrzymujemy

$$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad \text{lub} \quad \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

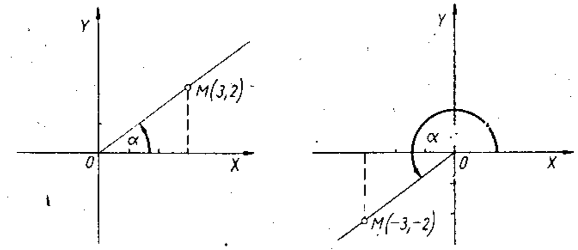
Bez dodatkowej informacji o kącie α nie można określić znaku. Jeśli jest taka informacja, np. jeśli wiadomo, że $90° < \alpha < 180°$, to wiedząc (rys. 99-3b), że w tej ćwiartce cosinus jest ujemny, wybierzemy znak „minus".

Przykład 2. Dana jest wartość $\operatorname{tg}\alpha=m$. Obliczyć $\cos\alpha$.

Rozwiązanie. Postępując, jak w zadaniu wzorcowym 2 (str. 159), dostajemy $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+m^2}$, skąd wynika alternatywa

$$\cos\alpha=+\sqrt{\frac{1}{1+m^2}} \quad \text{lub} \quad \cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+m^2}}$$

Możliwe są oba znaki: plus i minus, co dla wartości liczbowej $m=\frac{2}{3}$ pokazuje rys. 100-1. Porównując ten rysunek z rys. 95-1, widzimy, że definicja 99.1 jest uogólnieniem definicji 92.1.



Jeśli $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$, *to* $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$ *lub* $\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{13}}$

Rys. 100-1

Pytania i zadania

1. Napisać i udowodnić trzy podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta skierowanego.
2. Jak wyznacza się wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli jest dana wartość jednej z tych funkcji dla tego kąta?
3. Obliczyć wartości pozostałych trzech funkcji trygonometrycznych kąta α wiedząc, że

   a) $\cos\alpha = \frac{84}{85}$; b) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$; d) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

4. Obliczyć $\sin x$, jeśli $\cos x = \frac{84}{85}$ i kąt x spełnia nierówność:

   a) $270° < x < 360°$; b) $90° < x < 270°$; c) $|x| < 45°$; d) $45° < x < 135°$.

5. Uprościć wyrażenia: a) $\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha$; b) $\cos^2\alpha - 1$;

   c) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$; d) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$

6. Wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 6$. Obliczyć: a) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; b) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.
7. Wiadomo, że $\sin\alpha + \cos\alpha = c$. Obliczyć: a) $2\sin\alpha\cos\alpha$; b) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

101. Okresowość funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne jako funkcje miary kąta. Każdy kąt skierowany $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$ na płaszczyźnie OXY ma nieskończenie wiele miar stopniowych. Przyporządkowanie to jest wieloznaczne, ale przyporządkowanie odwrotne jest jednoznaczne, bowiem dowolnej liczbie α, uważanej za stopniową miarę kąta skierowanego w położeniu standardowym względem układu OXY, odpowiada jednoznacznie określony kąt $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$. To jednoznaczne przyporządkowanie jest funkcją

$$\alpha \longrightarrow \sphericalangle \overrightarrow{XOM}$$

która dowolnej liczbie α przyporządkowuje określony twór geometryczny $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$.

Kątowi $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$, zgodnie z definicją 99.1, odpowiadają określone wartości funkcji trygonometrycznych; dla ustalenia uwagi weźmy jedną z nich, np. sinus. Mamy więc drugą funkcję

$$\sphericalangle \overrightarrow{XOM} \xrightarrow{\sin \sphericalangle \overrightarrow{XOM}} \frac{y}{r}$$

która tworowi geometrycznemu $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$ przyporządkowuje liczbę określoną stosunkiem $\frac{y}{r}$.

Funkcja złożona z tych dwóch funkcji

$$\alpha \longrightarrow \sphericalangle \overrightarrow{XOM} \xrightarrow{\sin \sphericalangle \overrightarrow{XOM}} \frac{y}{r}$$

to funkcja, która dowolnej liczbie α za pośrednictwem stosownego kąta $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$ przyporządkowuje liczbę $\frac{y}{r}$. Tę funkcję złożoną oznaczymy symbolem $\sin\alpha$

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\sin\alpha"] & \sphericalangle \overrightarrow{XOM} \arrow[r, "\sin \sphericalangle \overrightarrow{XOM}"] & \frac{y}{r}
\end{tikzcd}$$

Symbol ten sam, co w definicji 99.1, ale teraz ma on dla nas nieco inny sens. Analogicznie można rozumieć symbole: $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. Tak rozumiane funkcje – to funkcje trygonometryczne stopniowej miary kąta skierowanego.

Funkcja okresowa, okres, okres podstawowy. Funkcję $f(x)$ określoną w zbiorze $\boldsymbol{E}$ nazywamy *okresową* (*periodyczną*), jeśli istnieje liczba t różna od 0 i taka, że jeśli x należy do $\boldsymbol{E}$, to także $x+t$ i $x-t$ należą do $\boldsymbol{E}$ i zachodzi równość

$$f(x+t) = f(x) = f(x-t)$$

Każdą liczbę t o tej własności nazywamy *okresem* (*periodem*) funkcji $f(x)$.

Jeśli pewna liczba t jest okresem danej funkcji, to również liczby $2t$, $3t$, $4t$, ... są okresami tej funkcji.

Najmniejszy dodatni okres danej funkcji (o ile istnieje) nazywamy *okresem podstawowym* tej funkcji.

W niektórych książkach okres podstawowy nazywa się krótko okresem, a o innych okresach nie wspomina się.

Okresowość funkcji trygonometrycznych stopniowej miary kąta. Niech będzie dana dowolna liczba rzeczywista α. Liczbie tej odpowiada określony kąt $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$, którego miarą stopniową jest α. Wzrostowi miary stopniowej kąta od wartości α do wartości $\alpha + 360°$ odpowiada jeden pełny obrót końcowego ramienia kąta; po tym obrocie ramię to powraca do poprzedniego położenia i wyznacza ten sam, co poprzednio kąt $\sphericalangle \overrightarrow{XOM}$.

Zatem dowolna funkcja trygonometryczna musi dla $360° + \alpha$ przybierać tę samą wartość, co dla α, a jeśli, w przypadku tangensa i cotangensa, funkcja była nieokreślona dla α, to i dla $360° + \alpha$ jest nieokreślona. Mamy więc dla dowolnego α równości

$$\begin{aligned}
\sin(360° + \alpha) &= \sin\alpha \\
\cos(360° + \alpha) &= \cos\alpha \\
\operatorname{tg}(360° + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(360° + \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha
\end{aligned} \tag{101.1}$$

z których wynika, że funkcje trygonometryczne stopniowej miary kąta są okresowe (periodyczne). Ich okresem (periodem) jest 360° (okresem jest liczba 360, a znak ° przypomina o założeniu, że chodzi tu o stopniową miarę kąta). Dla funkcji sin i cos jest to okres podstawowy.

Okresem podstawowym funkcji tg i ctg jest 180°

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(180°+\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(180°+\alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha \end{aligned} \qquad (101.2)$$

Wynika to stąd, że ramiona końcowe kątów α i $180°+\alpha$ w położeniu standardowym uzupełniają się do prostej przechodzącej przez punkt 0, a na takiej prostej stosunek rzędnej do odciętej jest stały.

Przykład 1. Wyznaczyć wartość sin 420°.

Rozwiązanie. $\sin 420° = \sin(360°+60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Przykład 2. Wyznaczyć wartość sin 765°.

Rozwiązanie. $\sin 765° = \sin(360°+360°+45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Przykład 3. Wyznaczyć wartość sin (−300°).

Rozwiązanie. $\sin(-300°) = \sin(-300°+360°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 4. Wyznaczyć wartość tg 225°.

Rozwiązanie. $\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg}(225°-180°) = \operatorname{tg} 45° = 1$.

Przykład 5. Wyznaczyć wartość cos 1965°.

Rozwiązanie. $1965°:360° = 5$ reszta 165°; $1965° = 5\cdot 360°+165°$

$$\begin{array}{l} \underline{1800} \\ \ \ 165 \end{array}$$

$$\cos 1965° = \cos(5\cdot 360°+165°) = \cos 165°$$

Kąta 165° nie znajdziemy w żadnej tablicy funkcji trygonometrycznych. Należy zastosować jeden ze wzorów redukcyjnych (zob. przykład 1, str. 184).

Pytania

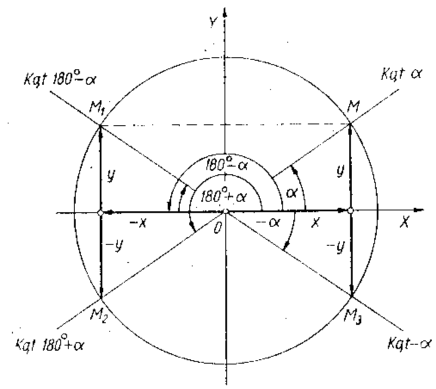
1. Kiedy funkcję nazywamy okresową? Co to jest okres podstawowy?
2. Co to znaczy, że sinus jest funkcją okresową? Jakie są podstawowe okresy funkcji trygonometrycznych?
3. Powiększając kąt $\alpha = 30°$ o 120° nie zmieniamy wartości sinusa

$$\sin(\alpha+120°) = \sin\alpha \quad \text{dla} \quad \alpha = 30°$$

Dlaczego, mimo tej równości, 120° nie jest okresem sinusa?

102. Wzory redukcyjne

Kąty α, 180°−α, 180°+α, −α. W tablicach podaje się wartości funkcji trygonometrycznych jedynie dla kątów I ćwiartki. W pozostałych ćwiartkach bowiem występują te same wartości, jedynie ich kolejność może być zmieniona lub znak. Widać to na kole trygonometrycznym (rys. 102-1). Obierzmy promień koła $r = 1$, wówczas rzędna jest równa sinusowi, a odcięta — cosinusowi danego kąta.



Rys. 102-1

Weźmy pod uwagę cztery kąty

$$\alpha \quad 180°-\alpha \quad 180°+\alpha \quad -\alpha \qquad (102.1)$$

i odpowiadające tym kątom cztery punkty okręgu

$$M \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \qquad (102.2)$$

Jeśli kąt α należy do I ćwiartki, to kąty $180°-\alpha$, $180°+\alpha$, $-\alpha$ należą odpowiednio do ćwiartek II, III i IV. Punkty (102.2) leżą symetrycznie, a mianowicie:

— punkt M_1 jest symetryczny do punktu M względem osi rzędnych;

— punkt M_2 jest symetryczny do punktu M względem początku układu;

— punkt M_3 jest symetryczny do punktu M względem osi odciętych.

Dzięki tej symetrii, łatwo wyznaczyć współrzędne punktów M_1, M_2, M_3, jeśli znane są współrzędne M. Oznaczmy współrzędne punktu M literami x, y; wówczas z rys. 102-1 odczytujemy

$$M(x,y) \quad M_1(-x,y) \quad M_2(-x,-y) \quad M_3(x,-y) \qquad (102.3)$$

Rzędne tych punktów są sinusami, a odcięte — cosinusami kątów (102.1). Mamy więc dla tych kątów następujące wartości sinusa i cosinusa (tabl. 102-1).

Tablica 102-1

Kąt	α	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$-\alpha$
Sinus	y	y	$-y$	$-y$
Cosinus	x	$-x$	$-x$	x

Porównując ze sobą te wartości, stwierdzamy, że sinus przyjmuje dla kątów α i $180°-\alpha$ tę samą wartość

$$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$$

natomiast dla kątów α i $-\alpha$ sinus przyjmuje wartości przeciwne

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

W podobny sposób odczytujemy z tablicy 102-1 dalsze związki. Zestawiono je w tablicy 102-2. Są one prawdziwe dla wszystkich wartości α i nazywają się *wzorami redukcyjnymi*.

Tablica 102-2

Wzory redukcyjne		
dla kąta $180°-\alpha$	dla kąta $180°+\alpha$	dla kąta $-\alpha$
$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$ $\mathrm{tg}(180°-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}(180°-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$ $\mathrm{tg}(180°+\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}(180°+\alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

Przykład 1. Wyznaczyć cos 165°.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór redukcyjny $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$

$$\cos 165° = \cos(180°-15°) = -\cos 15° = -0{,}9659$$

Przykład 2. Wyznaczyć cos 220°.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór redukcyjny

$$\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos 220° = \cos(180°+40°) = -\cos 40° = -0{,}7660$$

Przykład 3. Wyznaczyć sin (−30°) i cos (−30°).

Rozwiązanie. $\sin(-30°) = -\sin 30° = -0{,}5000$,

$\cos(-30°) = \cos 30° = 0{,}8660$.

Przykład 4. Wyznaczyć tg (−38°).

Rozwiązanie. Stosujemy wzór redukcyjny $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$$\mathrm{tg}(-38°) = -\mathrm{tg}\,38° = -0{,}7813$$

Przykład 5. Wyznaczyć cos (−70°).

Rozwiązanie. $\cos(-70°) = \cos 70° = 0{,}3420$.

Redukowanie dowolnych kątów do kątów I ćwiartki. Wzory (101.1) pozwalają zredukować dowolną miarę kąta do miary głównej, co pozwala rozpoznać do której ćwiartki dany kąt należy. Z kolei, podane powyżej wzory redukcyjne pozwalają zredukować ten kąt do pewnego kąta α należącego do I ćwiartki, a mianowicie:

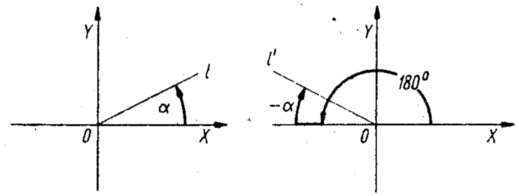
— kąt II ćwiartki przedstawiamy w postaci $180°-\alpha$ i stosujemy wzory redukcyjne dla kąta $180°-\alpha$;

— kąt III ćwiartki przedstawiamy w postaci $180°+\alpha$ i stosujemy wzory redukcyjne dla kąta $180°+\alpha$;

— kąt IV ćwiartki przedstawiamy w postaci $-\alpha$ i stosujemy wzory redukcyjne dla kąta $-\alpha$.

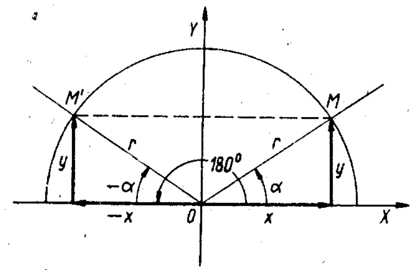
Oprócz wyżej wymienionych wzorów redukcyjnych podamy jeszcze dalsze. Wzorów redukcyjnych jest dość dużo. Istotne jest nie tyle wyuczenie się ich na pamięć, co umiejętność wyprowadzania tych wzorów. To zaś polega na właściwym odczytywaniu prostych rysunków. Pokazujemy to poniżej na paru przykładach.

Wzory dla kąta $180°-\alpha$. Rozważmy kąty α i $180° - \alpha$ w położeniu standardowym (rys. 102-2). Z kątem $180°-\alpha$ można skojarzyć wyobrażenie obrotu złożonego z obrotu o kąt 180° i obrotu o kąt $-\alpha$. Oba kąty kreślimy w jednym układzie, zataczamy okrąg i na otrzymanym w ten sposób kole trygonometrycznym odczytujemy rzędne i odcięte punktów M i M' (rys. 102-3). Rzędne są jednakowe, natomiast odcięte są liczbami przeciwnymi. Stąd odczytujemy, że jest



Rys. 102-2

$$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$$



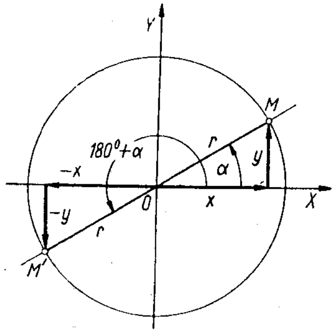
Rys. 102-3

Dzieląc pierwszą z tych równości przez drugą, otrzymujemy wzór

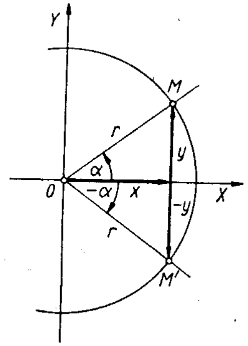
$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Wzory dla kąta $180°+\alpha$ wyprowadzamy za pomocą rys. 102-4.

Wzory dla kąta $-\alpha$ wyprowadzamy korzystając z rys. 102-5.

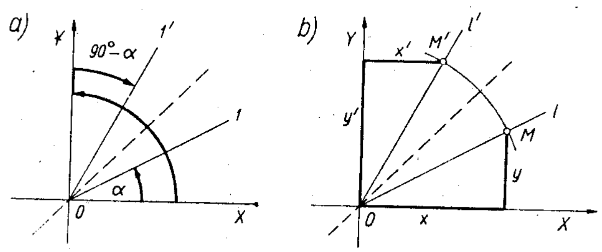


Rys. 102-4



Rys. 102-5

Kąty α i $90°-\alpha$. Rozważmy kąty α i $90°-\alpha$ w położeniu standartowym (rys. 102-6a). Końcowe ramiona tych kątów l i l' są wzajemnie symetryczne względem prostej dwusiecznej kąta XOY. Obierzmy punkty $M(x, y)$ i $M'(x', y')$ leżące odpowiednio na l i l' tak, aby $OM = OM' = r > 0$. Współrzędne tych punktów spełniają związki $x' = y$, $y' = x$ (rys. 102-6b). Stąd $\sin(90°-\alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\alpha$



Rys. 102-6. ab

oraz $\cos(90°-\alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin\alpha$. Ponieważ symetria półprostych l i l' zachodzi dla dowolnego α, więc dla dowolnego α mamy związki

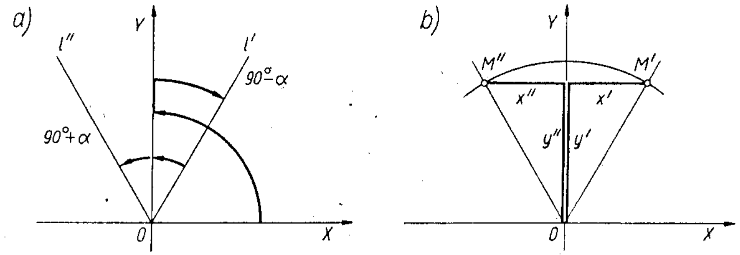
$$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90°-\alpha) = \sin\alpha \tag{102.4}$$

Związki te nazywamy wzorami redukcyjnymi dla kąta $90°-\alpha$. Odpowiedni wzór dla tangensa i cotangensa otrzymamy, dzieląc przez siebie stronami równości (102.4)

$$\operatorname{tg}(90°-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \tag{102.5}$$

Wzory (102.4) i (102.5) są uogólnieniem wzorów (93.1) na dowolny kąt α.

Kąty $90°-\alpha$ i $90°+\alpha$ (rys. 102-7a). Końcowe ramiona tych kątów są półprostymi l' i l'' położonymi symetrycznie względem osi rzędnych. Współrzędne punktów M' i M'' leżących na tych półprostych tak, aby $OM' = OM'' = r > 0$ (rys. 102-7b) spełniają związki $x'' = -x'$, $y'' = y'$. Stąd



Rys. 102-7. ab

$$\sin(90°+\alpha) = \frac{y''}{r} = \frac{y'}{r} = \sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90°+\alpha) = \frac{x''}{r} = \frac{-x'}{r} = -\cos(90°-\alpha) = -\sin\alpha$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzory redukcyjne dla kąta $90°+\alpha$

$$\sin(90°+\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90°+\alpha) = -\sin\alpha \tag{102.6}$$

Dzielac stronami, otrzymujemy

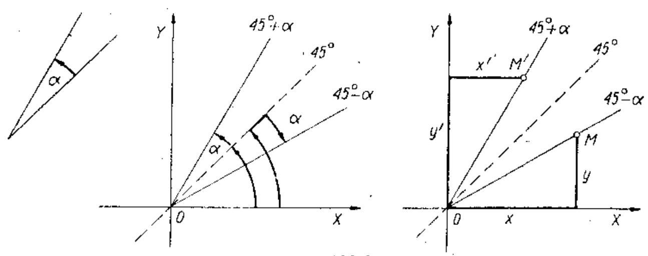
$$\operatorname{tg}(90°+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \tag{102.7}$$

Tablica 102-3

Wzory redukcyjne	
dla kąta $90°-\alpha$	dla kąta $90°+\alpha$
$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$ $\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$ $\operatorname{tg}(90°-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(90°-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\sin(90°+\alpha) = \cos\alpha$ $\cos(90°+\alpha) = -\sin\alpha$ $\operatorname{tg}(90°+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(90°+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Kąty $45°-\alpha$ i $45°+\alpha$. Kąty te w położeniu standartowym (rys. 102-8) mają ramiona końcowe położone symetrycznie względem prostej dwusiecznej I i III ćwiartki, a punkty M, M' leżące na tych ramionach, $OM = OM' = r > 0$, mają współrzędne (x, y) i (x', y'), przy czym jest $x' = y$, $y' = x$. Stąd wynikają wzory redukcyjne

$$\begin{aligned} \sin(45°+\alpha) &= \cos(45°-\alpha) \\ \cos(45°+\alpha) &= \sin(45°-\alpha) \\ \operatorname{tg}(45°+\alpha) &= \operatorname{ctg}(45°-\alpha) \\ \operatorname{ctg}(45°+\alpha) &= \operatorname{tg}(45°-\alpha) \end{aligned} \tag{102.8}$$



Rys. 102-8

Pytania i zadania

1. Zredukować do I ćwiartki następujące wartości funkcji:
   a) $\sin 138°$; b) $\cos 115°$; c) $\operatorname{tg} 165°$; d) $\sin(-250°)$; e) $\cos 190°$; f) $\operatorname{tg} 300°$; g) $\sin 1000°$; h) $\cos 1000°$; k) $\operatorname{tg} 1000°$.
2. Napisać i uzasadnić wzory redukcyjne dla kątów:
   a) $180°-\alpha$, b) $180°+\alpha$, c) $-\alpha$, d) $90°-\alpha$, e) $90°+\alpha$.
3. Wyrazić przy pomocy kątów dodatnich, nie większych od 45°;
   a) $\cos 115°$; b) $\sin(-250°)$; c) $\operatorname{tg} 300°$; d) $\sin 1000°$; e) $\sin 225°$.
4. Posługując się wzorami redukcyjnymi i tablicą 96-1, wyznaczyć:
   a) $\sin 120°$, b) $\sin 240°$, c) $\sin 300°$, d) $\cos 210°$, e) $\cos 135°$, f) $\operatorname{tg} 150°$, g) $\operatorname{tg} 315°$ h) $\operatorname{tg}(-225°)$, k) $\operatorname{ctg} 150°$, l) $\operatorname{ctg} 330°$.
5. Napisać i uzasadnić wzory redukcyjne dla kąta $270°+\alpha$.
6. Podać wszystkie kąty x, dla których zachodzi równość:

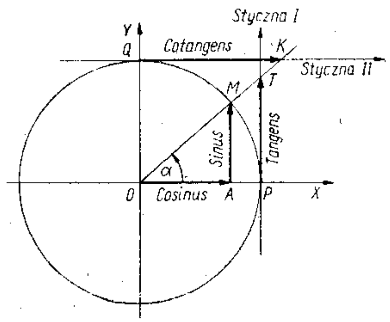
$\sin x = 0$	$\cos x = 0$	$\operatorname{tg} x = 0$	$\operatorname{ctg} x = 0$
$\sin x = 1$	$\cos x = 1$	$\operatorname{tg} x = 1$	$\operatorname{ctg} x = 1$
$\sin x = -1$	$\cos x = -1$	$\operatorname{tg} x = -1$	$\operatorname{ctg} x = -1$
$\sin x = \frac{1}{2}$	$\cos x = \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$
$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\cos x = -\frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

(wystarczy podać po jednej mierze każdego kąta).

7. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenia:
   a) $\sin(180°-x)+\cos(90°+x)$;
   b) $\cos(180°-x)\sin(90°-x)$;
   c) $\operatorname{tg}(270°-x)\operatorname{tg}(180°+x)$;
   d) $\sin(270°-x)-\cos(180°+x)$;
   e) $\cos(270°+x)+\sin(180°+x)$;
   f) $\sin(90°+x)-\cos(180°-x)$;
   g) $\sin(-x)-\cos(270°-x)$;
   h) $\sin(x-180°)$;
   k) $\cos(x-180°)$;
   l) $\operatorname{tg}(x-270°)$.

103. Koło trygonometryczne i przebieg funkcji trygonometrycznych w zakresie dowolnych kątów skierowanych

Koło trygonometryczne. Nakreślmy na płaszczyźnie OXY okrąg o środku O i promieniu $r = 1$ (rys. 103-1) i poprowadźmy dwie styczne do tego okręgu — styczną I przez punkt P przecięcia okręgu dodatnią półosią OX; — styczną II przez punkt Q przecięcia okręgu dodatnią półosią OY.



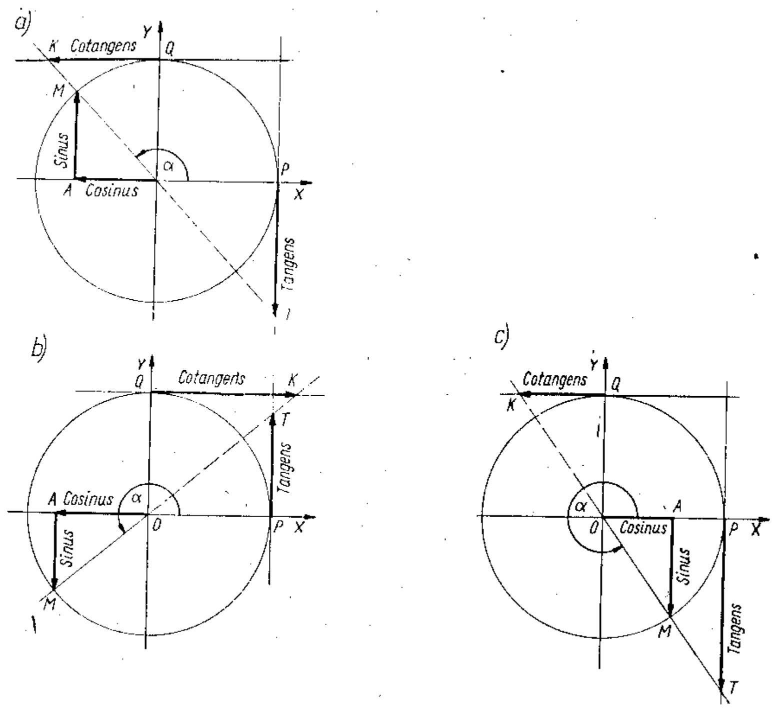
Rys. 103-1. Koło trygonometryczne; kąt α w I ćwiartce

Styczną I skierowujemy zgodnie z osią OY, styczną II — zgodnie z osią OX. Niech będzie dany dowolny kąt skierowany w położeniu standardowym $\measuredangle \overrightarrow{XOM}$ o mierze α, $OM = r = 1$. Punkty, w których prosta OM przecina styczną I i styczną II, oznaczamy odpowiednio T i K. Rzut punktu M na oś OX oznaczamy A.

Przy tych założeniach i oznaczeniach mamy równości

$$\sin\alpha = \text{miara wektora } \overrightarrow{AM} \text{ względem osi } OY$$
$$\cos\alpha = \text{miara wektora } \overrightarrow{OA} \text{ względem osi } OX$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \text{miara wektora } \overrightarrow{PT} \text{ względem osi } OY$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \text{miara wektora } \overrightarrow{QK} \text{ względem osi } OX$$

Wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AM}$ są składowymi wektora $\overrightarrow{OM}$, równoległymi do osi układu. Wektory $\overrightarrow{PT}$ i $\overrightarrow{QK}$ są odcinane na stycznej I i stycznej II przez pary prostych: OX i OM, względnie OY i OM. Rys. 103-2 ilustruje to w przypadku kątów II, III i IV ćwiartki.



Rys. 103-2. Koło trygonometryczne; kąt α w ćwiartce: a) drugiej, b) trzeciej, c) czwartej

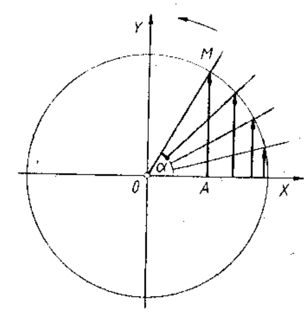
Dla kątów: 0°, 90°, 180° i 270° niektóre z wektorów $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{QK}$, przedstawiających wartości funkcji trygonometrycznych, są zerowe lub nieokreślone. Jest to ilustracją faktu, że odpowiednie funkcje trygonometryczne są dla tych kątów równe zeru lub nieokreślone

sin 0° = 0	tg 0° = 0
cos 0° = 1	ctg 0° jest nieokreślony
sin 90° = 1	tg 90° jest nieokreślony
cos 90° = 0	ctg 90° = 0
sin 180° = 0	tg 180° = 0
cos 180° = −1	ctg 180° jest nieokreślony
sin 270° = −1	tg 270° jest nieokreślony
cos 270° = 0	ctg 270° = 0
dla kąta 360° jest tak samo jak dla kąta 0°	
dla kąta 360°+90° jest tak samo jak dla kąta 90°	

Zadanie 1. Odczytać z rys. 103-2c znak funkcji trygonometrycznych w IV ćwiartce.

Przebieg funkcji sinus. Ze zmian wektora $\overrightarrow{AM}$ w kole trygonometrycznym odczytujemy przebieg funkcji $\sin\alpha$, a mianowicie:

ćwiartka I; jeśli α rośnie od 0° do 90°, to $\sin\alpha$ jest dodatni i rośnie od 0 do 1 (rys. 103-3);



Rys. 103-3. Wzrost sinusa w I ćwiartce

ćwiartka II: jeśli α rośnie od 90° do 180°, to $\sin\alpha$ jest dodatni i maleje od 1 do 0;

ćwiartka III: jeśli α rośnie od 180° do 270°, to $\sin\alpha$ jest ujemny i maleje od 0 do −1;

ćwiartka IV: jeśli α rośnie od 270° do 360°, to $\sin\alpha$ jest ujemny i rośnie od −1 do 0.

Sinus jest funkcją rosnącą w ćwiartkach IV i I, zaś malejącą w ćwiartkach II i III. Sinus jest funkcją ograniczoną; dla dowolnego α jest $|\sin\alpha| \leqslant 1$.

Zadanie 2. Opisać przebieg funkcji cosinus. Sformułować odpowiedź pisemnie, a potem porównać z odpowiedzią na str. 220.

Przebieg funkcji tangens. Ze zmian wektora $\overrightarrow{PT}$ na kole trygonometrycznym odczytujemy:

ćwiartka I: jeśli α rośnie od 0° do 90° (rys. 103-1), to tangens jest dodatni i rośnie od 0 do $+\infty$, przyjmując dla kątów bliskich 90° i mniejszych od 90° wartości dowolnie duże; punkt T oddala się po stycznej I w górę do nieskończoności; dla $\alpha = 90°$ punkt T nie istnieje i tangens jest nieokreślony;

ćwiartka II: jeśli α rośnie od 90° do 180° (rys. 103-2), punkt T przesuwa się po stycznej od dołu w górę do punktu P (rys. 103-2a); tangens jest ujemny i rośnie od $-\infty$ do 0; również i w tej ćwiartce tangens jest funkcją rosnącą;

ćwiartka III: jeśli α rośnie od 180° do 270° (rys. 103-2b) punkt T przesuwa się po stycznej w górę analogicznie jak w I ćwiartce: tangens przyjmuje te same wartości, co w I ćwiartce, i w tej samej kolejności; jest więc dodatni i rośnie od 0 do $+\infty$;

ćwiartka IV: jeśli α rośnie od 270° do 360° (rys. 103-2c), to tangens jest ujemny i rośnie od $-\infty$ do 0.

Tangens jest funkcją rosnącą w każdej ćwiartce, a także w przedziałach (−90°;+90°), (90°; 270°). Tangens jest funkcją nieograniczoną.

Zadanie 3. Nakreślić koło trygonometryczne z drugą styczną i opisać przebieg funkcji cotangens. Porównać z odpowiedzią na str. 218.

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste. Funkcja cosinus jest parzysta, bowiem według wzoru redukcyjnego dla kąta $-\alpha$ (str. 184) dla dowolnego α zachodzi równość

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

(zastąpienie argumentu liczbą przeciwną nie zmienia wartości funkcji).

Funkcje sinus, tangens i cotangens są nieparzyste, bowiem

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

(zastąpienie argumentu liczbą przeciwną zmienia wartość funkcji na przeciwną).

Pytania i zadania

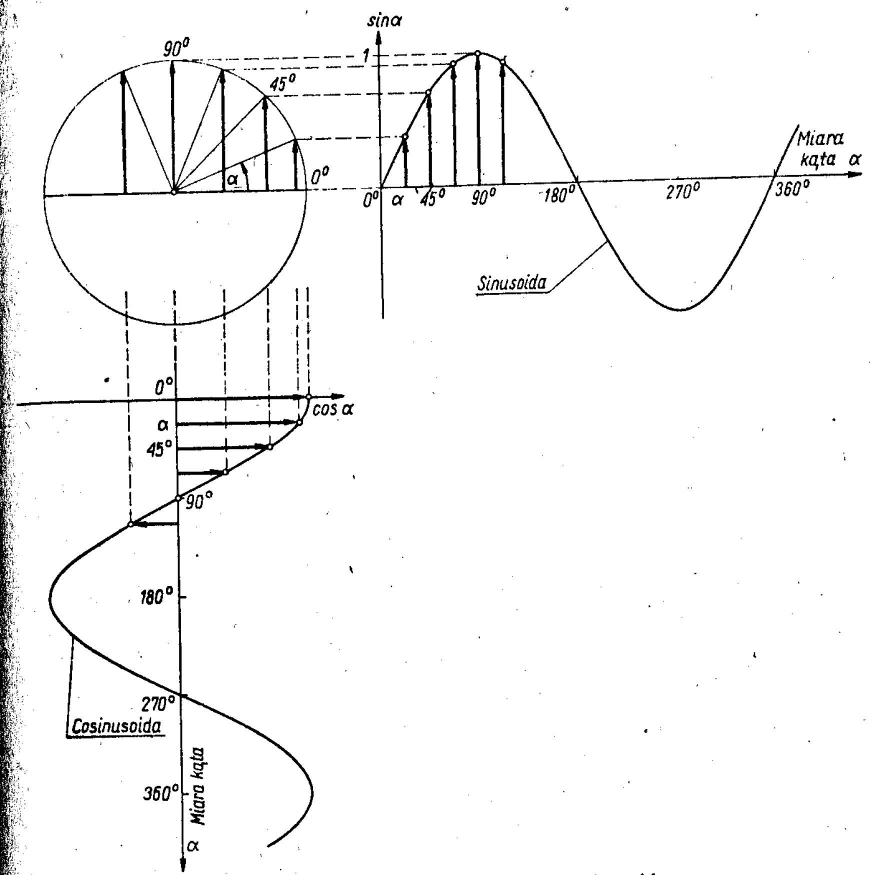
4. Co to znaczy, że funkcja jest parzysta? Które funkcje trygonometryczne są parzyste? Co to znaczy, że funkcja jest nieparzysta? Które funkcje trygonometryczne są nieparzyste?
5. Porównując wartości danej funkcji przy $x = a$ i $x = -a$, rozstrzygnąć jaką funkcją — parzystą czy nieparzystą — jest funkcja:
1) $\sin^2 x$; 2) $\sin(x^2)$; 3) $\cos^3 x$; 4) $\cos(x^3)$; 5) $\sin^3 x$; 6) $\sin x \cos x$; 7) $\sin x \operatorname{tg} x$; 8) $\sin x + \operatorname{tg} x$; 9) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 10) $\cos x + \sin x$.
6. Pokazać na kole trygonometrycznym wartość bezwzględną i znak czterech funkcji trygonometrycznych dla kątów: 60°, 120°, 210° i 315°. Które z nich są równe?
7. Opisać przebieg funkcji trygonometrycznych w II ćwiartce.

104. Wykresy funkcji trygonometrycznych

Sinusoida jest to wykres funkcji sinus w układzie prostokątnym. Aby nakreślić sinusoidę, odcinamy na osi odciętych miary kątów i w otrzymanych punktach tej osi zaczepiamy wektory prostopadłe, których miary na osi rzędnych równają się wartościom funkcji sinus.

Na każdej z dwóch osi układu można obrać dowolną jednostkę. Na ogół staramy się mieć na obu osiach tę samą jednostkę. W przypadku stopniowej miary kąta byłoby to bardzo niewygodne. Jednostka na osi odciętych powinna być dość krótka, aby na rysunku zmieścił się dość szeroki zakres kątów, np. od 0° do 360°. Z drugiej strony sinus przyjmuje wartości zawarte między -1 i $+1$, więc jednostka na osi rzędnych nie może być tak mała, jak na osi odciętych. Dlatego, stosując stopniową

miarę kąta, będziemy używać różnych jednostek na osiach układu. Jednostkę na osi rzędnych przyjmiemy równą promieniowi koła trygonometrycznego; wtedy można wektory przedstawiające wartości funkcji trygonometrycznych wprost „wyj-



Rys. 104-1. Konstrukcja sinusoidy i cosinusoidy

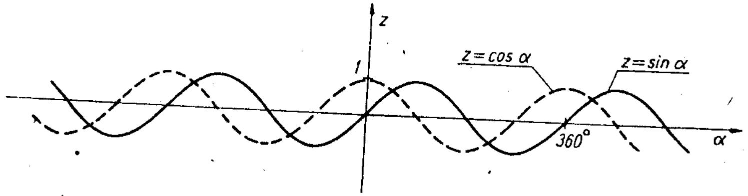
mować" z koła trygonometrycznego i „rozstawiać" na osi odciętych. Linia łącząca końce tych wektorów będzie wykresem odpowiedniej funkcji trygonometrycznej. Rys. 104-1 przedstawia wykres funkcji sinus.

Cosinusoida jest to wykres funkcji cosinus w układzie prostokątnym. Cosinusoidę kreślimy podobnie jak sinusoidę. Ponieważ wektory przedstawiające wartości cosinusa leżą w kole trygonometrycznym poziomo, więc, aby ułatwić sobie przenoszenie ich, trzeba by obrócić koło trygonometryczne o kąt $+90°$ albo też obrócić wykres o kąt $-90°$.

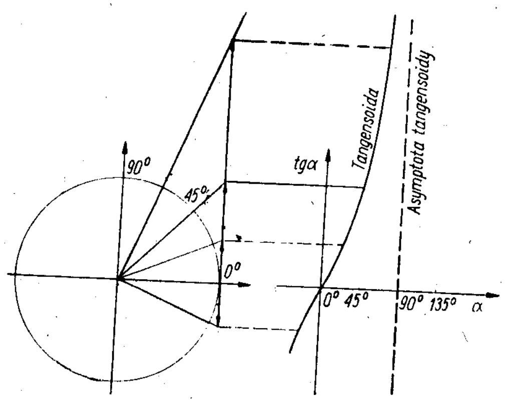
Cosinusoida jest krzywą tego samego kształtu, co sinusoida. Jeśli obie te krzywe wykreślimy w jednym układzie, to okaże się, że cosinusoida jest przesunięta [illegible] sinusoidy w lewo o odcinek długości odpowiadającej 90°. Odpowiada [illegible] tożsamości

$$\cos(\alpha - 90°) = \sin\alpha$$

Ponieważ każdy kąt ma nieskończenie wiele miar, więc sinusoida i cosinusoida mogą być przedłużane o dowolnie wiele „fal" w lewo i w prawo (rys. 104-2).



Rys. 104-2. Sinusoida i cosinusoida



Rys. 104-3. Konstrukcja tangensoidy

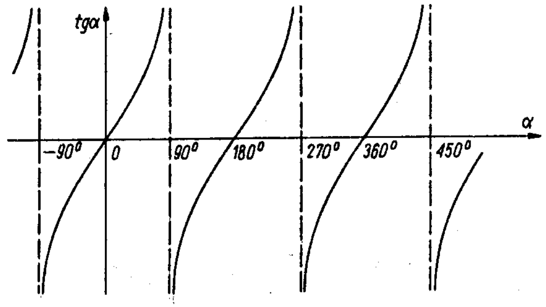
Tangensoida jest to wykres funkcji tangens. Rys. 104-3 przedstawia sposób kreślenia tangensoidy dla kątów I ćwiartki. Na rys. 104-4 widzimy tangensoidę, składa się ona z gałęzi, wzajemnie przystających i oddzielonych asymptotami.

Asymptoty są to proste pomocnicze, nie należące do wykresu; poszczególne gałęzie tangensoidy, przedłużane, zbliżają się do asymptot dowolnie blisko, ale nie przecinają ich.

Dziedziną funkcji tangens jest suma przedziałów

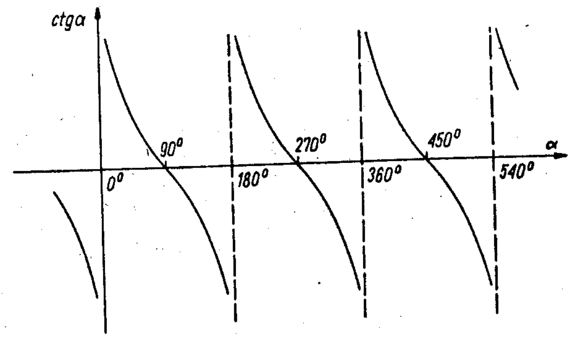
$$\ldots, (-90°; +90°), \quad (90°; 270°), \quad (270°; 540°), \ldots$$

W każdym z tych przedziałów tangens rośnie od $-\infty$ do $+\infty$. W punktach rozgraniczających te przedziały tangens jest nieokreślony, a w sąsiedztwie tych punktów nieograniczony.



Rys. 104-4. Wykres funkcji tg α

Tangensoida przecina oś odciętych w punktach odpowiadających miarom stopniowym kątów, dla których tangens przybiera wartość 0; kąty takie są dwa: zerowy i półpełny, ich miary wyraża wzór $k \cdot 180°$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.



Rys. 104-5. Wykres funkcji ctg α

Cotangensoida, czyli wykres funkcji cotangens (rys. 104-5) jest krzywą odwrotnie przystającą do tangensoidy. Asymptoty cotangensoidy odpowiadają innym kątom niż asymptoty tangensoidy. Cotangens jest funkcją malejącą w każdym ze swych przedziałów istnienia.

105. Tożsamości trygonometryczne

Poniżej podajemy około 30 tożsamości trygonometrycznych, których biegłe opanowanie pamięciowe, wraz z dowodami, uważamy za niezbędne. Tożsamości te dzielą się na kilka grup. Poszczególne tożsamości mają nazwy, których brzmienia są niekiedy podobne, np. „sinus sumy” i „suma sinusów”, ale znaczenia ich są różne, gdyż wyrażenia takie jak

sinus sumy	suma sinusów
$\sin(\alpha+\beta)$	$\sin\alpha+\sin\beta$

są na ogół nierówne np., dla $\alpha=\beta=90^\circ$ pierwsze z nich przybiera wartość 0 a drugie – wartość 2.

Funkcje sumy kątów

Zagadnienie. Uważając wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β

$$\sin\alpha,\quad \sin\beta,\quad \cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{tg}\beta$$

za wiadome wyrazić przez nie wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha+\beta$

$$\sin(\alpha+\beta),\quad \cos(\alpha+\beta),\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$$

Twierdzenie. *Funkcje trygonometryczne sumy dwóch kątów wyrażają się następującymi wzorami:*

sinus sumy $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ (105.1)

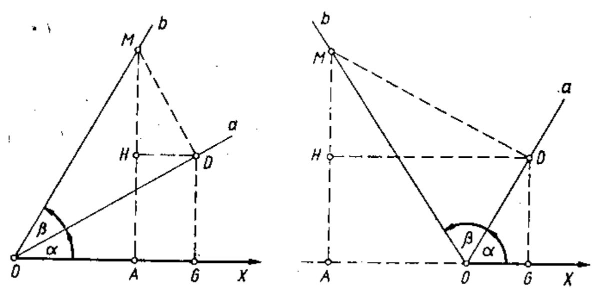
cosinus sumy $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ (105.2)

tangens sumy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (105.3)

Pierwsze dwa wzory są prawdziwe dla wszelkich α i β. Wzór na tangens sumy jest prawdziwy dla wszystkich α, β, oprócz tych, dla których $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ lub $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ jest nieokreślony.

Dowód wzorów (105.1) i (105.2). Rozważymy następujące przypadki

1. Przypadek, gdy jeden z kątów α, β jest zerowy lub prosty. Wówczas prawdziwość wzorów jest oczywista albo wynika ze wzorów redukcyjnych. Jeśli np. $\beta=0$, to po lewej stronie wzoru (105.1) mamy $\sin\alpha$, a po prawej $\sin\alpha\cos 0+\cos\alpha\sin 0=\sin\alpha$ i wzór jest prawdziwy. Jeśli zaś $\beta=90^\circ$, to wzór ten przybiera postać $\sin(\alpha+90^\circ)=\cos\alpha$, co jest zgodne ze wzorem redukcyjnym (102.6). Także przypadek $\alpha+\beta=90^\circ$ sprowadzą się do wzorów (102.4).



Rys. 105-1

2. Przypadek, gdy α i β należą do I ćwiartki. Wówczas $\alpha+\beta$ należy do I lub II ćwiartki (rys. 105-1). W układzie OXY kreślimy kąt α w położeniu standartowym, a kąt β kreślimy tak, aby półprosta a będąca końcowym ramieniem kąta α, była jednocześnie początkowym ramieniem kąta β. Wówczas półprosta b będąca końcowym ramieniem kąta β, jest jednocześnie końcowym ramieniem kąta $\alpha+\beta$ i kąt ten ma położenie standartowe. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

- na półprostej b obieramy punkt M różny od O;
- rzut punktu M na OX oznaczamy A;
- rzut punktu M na półprostą a oznaczamy D;
- rzut punktu D na oś OX oznaczamy G;
- rzut punktu D na odcinek $\overline{AM}$ oznaczamy H.

Zgodnie z definicją sinusa jest $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\text{miara }\overrightarrow{AM}}{OM}$. Ponieważ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}$ i wektory $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HM}$ są skierowane zgodnie z Oy, więc miara $\overrightarrow{AM}=AH+HM$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\text{miara }\overrightarrow{AM}}{OM}=\frac{AH+HM}{OM}=\frac{GD+HM}{OM}=\frac{GD}{OM}+\frac{HM}{OM}=$$
$$=\frac{GD}{OD}\cdot\frac{OD}{OM}+\frac{HM}{MD}\cdot\frac{MD}{OM}$$

Ponieważ $\dfrac{GD}{OD}=\sin\alpha$, $\dfrac{OD}{OM}=\cos\beta$, $\sphericalangle HMD=\sphericalangle GOD=\alpha$, skąd $\dfrac{HM}{MD}=\cos\alpha$ i wreszcie $\dfrac{MD}{OM}=\sin\beta$, więc $\dfrac{GD}{OD}\cdot\dfrac{OD}{OM}+\dfrac{HM}{MD}\cdot\dfrac{MD}{OM}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, co dowodzi prawdziwości wzoru (105.1).

W dowodzie wzoru (105.2) korzystamy z tego, że $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{AG}$. Wektory $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{AG}$ są skierowane zgodnie z osią OX, więc miara $\overrightarrow{OA}=OG-AG$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\text{miara }\overrightarrow{OA}}{OM}=\frac{OG-AG}{OM}=\frac{OG}{OM}-\frac{AG}{OM}=\frac{OG}{OM}-\frac{HD}{OM}=$$
$$=\frac{OG}{OD}\cdot\frac{OD}{OM}-\frac{HD}{MD}\cdot\frac{MD}{OM}$$

Dzięki związkom wymienionym powyżej, otrzymane wyrażenie równa się $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, co dowodzi prawdziwości wzoru (105.2).

3. Przypadek, gdy α lub β nie należą do I ćwiartki. Przypadek taki sprowadza się do poprzedniego za pomocą wzorów redukcyjnych. Nie będziemy rozważać tu wszystkich możliwości. Dla przykładu weźmiemy przypadek, gdy α jest kątem II, a β kątem I ćwiartki. Wówczas $\alpha=90^\circ+\alpha'$, gdzie α' jest kątem I ćwiartki i $\alpha'=\alpha-90^\circ$.

Wychodząc od lewej strony wzoru (105.1), mamy

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[(90^\circ+\alpha')+\beta]=\sin[90^\circ+(\alpha'+\beta)]=\cos(\alpha'+\beta)$$

Stosując wzór (105.2), już udowodniony dla kątów I ćwiartki, mamy

$$\cos(\alpha'+\beta)=\cos\alpha'\cos\beta-\sin\alpha'\sin\beta$$

Wracając do kąta α, zapiszemy otrzymane wyrażenie w postaci

$$\cos(\alpha-90^\circ)\cos\beta-\sin(\alpha-90^\circ)\sin\beta$$

Dzięki wzorom redukcyjnym $\cos(\alpha-90°) = \cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$, $\sin(\alpha-90°) = -\sin(90°-\alpha) = -\cos\alpha$ możemy otrzymane wyrażenie zapisać w postaci

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ale to jest prawa strona wzoru (105.1) i w ten sposób wzór ten został w tym przypadku udowodniony.

Dowód wzoru (105.2) w tym przypadku — pozostawiamy Czytelnikowi.

Dowód wzoru (105.3) Wzór ten wynika ze wzorów (105.1) i (105.2):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

W otrzymanym ułamku dzielimy licznik i mianownik przez $\cos\alpha\cos\beta$ i otrzymujemy

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

co kończy dowód.

Funkcje różnicy kątów. Zastępując we wzorach (105.1) — (105.3) kąt β kątem $-\beta$ i stosując wzory redukcyjne $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, otrzymujemy

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (105.4)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (105.5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (105.6)$$

Funkcje kąta podwójnego. Podstawiając we wzorach (105.1) — (105.3) $\beta = \alpha$, otrzymujemy

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \qquad (105.7)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad (105.8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad (105.9)$$

Korzystając z „jedności trygonometrycznej", można $\cos 2\alpha$ wyrazić w postaciach

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 \qquad (105.10)(105.11)$$

Jeśli we wzorach (105.7)—(105.11) kąt α zastąpimy kątem $\frac{\alpha}{2}$, to otrzymamy wzory

$$\sin = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (105.12)$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (105.13)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (105.14)$$

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \qquad (105.15)\ (105.16)$$

Funkcje połowy kąta. Zagadnienie: Uważając wartości $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ za wiadome, wyrazić przez nie wartości $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Cosinus i sinus połowy kąta. Z równości (105.15) i (105.16) otrzymujemy

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (105.17)(105.18)$$

Postawiliśmy w nich $\pm$, gdyż oba znaki są możliwe i wybrać należy znak $+$ lub $-$ zależnie od tego, w której ćwiartce leży kąt $\frac{\alpha}{2}$.

Tangens połowy kąta otrzymujemy, dzieląc (105.18) przez (105.17)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (105.19)$$

Tangens połowy kąta można wyrazić przez tangens kąta, rozwiązując równanie (105.14) względem $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad (105.20)$$

Wadą wzorów (105.19) i (105.20) jest dwoistość znaku i postać niewymierna (pierwiastek). Wolne od tych wad są wzory

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (105.21)\ (105.22)$$

Dowód wzoru (105.21)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{wzór (105.15)}}{\text{wzór (105.12)}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Dowód wzoru (105.22) jest analogiczny, pozostawiamy go Czytelnikowi.

Wymierne wyrażenie funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta przez tangens połowy tego kąta. Przyjmując oznaczenie

$$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \qquad (105.23)$$

otrzymujemy następujące tożsamości

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \qquad (105.24)\ (105.25)\ (105.26)$$

Dowód wzoru (105.24)

$$\sin\alpha = \sin 2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Dowód wzoru (105.25), analogiczny, pozostawiamy Czytelnikowi. Wzór (105.26) otrzymujemy, dzieląc (105.24) przez (105.25).

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych *wyrażają się wzorami*

suma sinusów $$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (105.27)$$

różnica sinusów $$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (105.28)$$

suma cosinusów $$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (105.29)$$

różnica cosinusów $$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (105.30)$$

Dowód wzoru (105.27). Wprowadzenie zmiennych pomocniczych. Do dwóch danych liczb α, β można zawsze dobrać takie dwie liczby x, y, że

$$\alpha = x+y \qquad \beta = x-y$$

Liczbami tymi są

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Korzystając ze wzorów na funkcje sumy i różnicy kątów, mamy

$$\sin\alpha+\sin\beta = \sin(x+y)+\sin(x-y) =$$
$$= \sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y =$$
$$= 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Podobnie udowadnia się pozostałe wzory tej grupy.

Analogiczne wzory na sumę i różnicę tangensów i cotangensów wyprowadza się łatwo, np.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad (105.31)$$

Powyższe wzory pozwalają sprowadzić sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do postaci iloczynu, który jest wygodny przy stosowaniu logarytmów. Tego rodzaju przekształcenia nazywamy sprowadzeniem do postaci *logarytmowalnej*.

Pytania i zadania

1. Napisać z pamięci wzory na funkcje sumy, funkcje różnicy i funkcje kąta podwójnego. Udowodnić te wzory.

2. Mając w pamięci wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60° obliczyć bez pomocy tablic za pomocą wzorów na funkcje sumy i funkcje różnicy następujące wartości:

a) $\sin 75°$; b) $\cos 75°$; c) $\operatorname{tg} 75°$; d) $\cos 44°\cos 14°+\sin 44°\sin 14°$;

e) $\dfrac{\operatorname{tg} 80°-\operatorname{tg} 20°}{1+\operatorname{tg} 80°\operatorname{tg} 20°}$; f) $\dfrac{\operatorname{tg} 100°+\operatorname{tg} 50°}{1-\operatorname{tg} 100°\operatorname{tg} 50°}$.

3. Obliczyć $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$ i $\operatorname{tg} 2\alpha$, jeśli $\sin\alpha = 0{,}1$.

4. Wyprowadzić wzory na cosinus i sinus połowy kąta.

5. Znając wartość $\cos 45°$, obliczyć za pomocą wzorów na funkcje połowy kąta cosinus, sinus i tangens kąta 22°30′.

6. Obliczyć $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ jeśli wiadomo, że

a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < 180°$; b) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $180° < \alpha < 360°$;

c) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $|\alpha| < 180°$

7. Wyprowadzić wzory wyrażające funkcje kąta przez tangens połowy kąta.

8. Obliczyć $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

9. Wyprowadzić wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych.

10. Stosując wzory na sumę i różnicę funkcji obliczyć:
a) $\sin 75°+\sin 15°$ b) $\sin 75°-\sin 15°$
c) $\cos 75°+\cos 15°$ d) $\cos 75°-\cos 15°$

11. Sprowadzić do postaci logarytmowalnej następujące wyrażenia:
a) $\sin 320°-\sin 240°$; b) $1+\cos 80°$; c) $1+\sin 2\alpha$; d) $\sin\alpha+\cos\alpha$;
e) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$; f) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$; g) $\sin 20°-\cos 50°$; h) $\sin^2\alpha-\cos^2\beta$.

12. Udowodnić tożsamości:

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} \qquad (105.32)\ (105.33)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta} \qquad (105.34)\ (105.35)$$

106. Tożsamości trygonometryczne (ciąg dalszy)

Tożsamości bezwarunkowe. *Tożsamością bezwarunkową* nazywamy równość zawierającą pewne zmienne i prawdziwą dla wszelkich wartości tych zmiennych, dla których występujące w tej równości wyrażenia mają sens.

Istnieje wiele tożsamości trygonometrycznych. Wynikają one z definicji i związków podstawowych, niektóre z nich są oczywiste, np.

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1 \qquad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta$$

inne, np. wyrażenie sinusa i cosinusa potrójnego kąta przez sinus i cosinus pojedynczego kąta

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \qquad (106.1)(106.2)$$

wymagają dłuższego dowodu. Nie jest konieczne pamiętanie tych tożsamości, ale trzeba umieć udowodnić je.

Aby udowodnić tożsamość, poddajemy przekształceniom jedną stronę tożsamości, korzystając ze wzorów ust. 100, 102 i 105, i staramy się sprowadzić ją do postaci, którą ma druga strona. Można też każdą z dwóch stron tożsamości przekształcać oddzielnie, aby obie doprowadzić do tej samej postaci.

Czytelnik zechce udowodnić poniższe tożsamości:

$$\sin^4 y-\cos^4 y=2\sin^2 y-1 \qquad \operatorname{tg}x\sin 2x=2\sin^2 x$$

$$\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}=\frac{2}{\cos^2 x} \qquad \frac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\operatorname{tg}4x$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)+\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+45^\circ\right)-\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad \operatorname{tg}(45^\circ+x)\operatorname{tg}(45^\circ-x)=1$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha) \qquad \cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ+\alpha)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha) \qquad \frac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1}=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)$$

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\cos\frac{n\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\sin\frac{n\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha=\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha} \qquad (106.3)$$

W dowodzie ostatnich czterech tożsamości należy posłużyć się indukcją. Dla przykładu udowodnimy ostatnią tożsamość.

Dowód indukcyjny. Sprawdzenie dla $n=1$. Dla $n=1$ tożsamość ta przybiera postać

$$\sin\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$$

i jest rzeczywiście prawdziwa.

Krok indukcyjny (z n na $n+1$). W równości (106.3) zastępujemy n przez $n+1$ otrzymujemy w ten sposób równość

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha+\sin(2n+1)\alpha=\frac{\sin^2(n+1)\alpha}{\sin\alpha} \qquad (106.4)$$

Należy wykazać, że dla dowolnego n naturalnego zachodzi implikacja

(106.3) $\Rightarrow$ (106.4) (krok indukcyjny)

Otóż po lewej stronie równości (106.4) występuje $n+1$ składników. Sumę n początkowych składników można na podstawie (106.3) zastąpić wyrazem $\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$. Jeśli to uczynimy, to lewa strona równości (106.4) przyjmie postać

$$\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}+\sin(2n+1)\alpha$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i podstawieniu

$$\sin n\alpha=\sin[(n+1)\alpha-\alpha]=\sin(n+1)\alpha\cos\alpha-\cos(n+1)\alpha\sin\alpha$$
$$\sin(2n+1)\alpha=\sin[(2n+2)\alpha-\alpha]=\sin(2n+2)\alpha\cos\alpha-\cos(2n+2)\alpha\sin\alpha$$

oraz po wykonaniu działań, przy czym do $\sin(2n+2)\alpha$ i $\cos(2n+2)\alpha$ należy stosować wzory (105.7) i (105.8) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\sin^2(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

czyli prawą stronę równości (106.4). Dowód zakończony.

Tożsamości trygonometryczne warunkowe są to równości prawdziwe dla kątów spełniających pewien warunek, np.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \quad \text{dla} \quad \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \quad \text{dla} \quad \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$

Warunek $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ jest spełniony przez kąty dowolnego trójkąta, ale jest ogólniejszy, gdyż jest spełniony też przez kąty nie występujące w trójkącie, np. $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = -90^\circ$. Podajemy dowód pierwszej z tych dwóch tożsamości. Z podanego warunku wynika $\gamma = 180^\circ-(\alpha+\beta)$ zatem

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}[180^\circ-(\alpha+\beta)] =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= -\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}[180^\circ-(\alpha+\beta)] = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

107. Równania trygonometryczne

Równaniem trygonometrycznym (także: *goniometrycznym*) nazywamy równanie, w którym niewiadome występują wyłącznie pod znakami funkcji trygonometrycznych. Oto przykłady równań trygonometrycznych

$$5\sin x-3 = 0 \tag{107.1}$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1 = 0 \tag{107.2}$$

$$\operatorname{tg}^3 x-4\operatorname{tg} x = 0 \tag{107.3}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}-2\sin x = 0 \tag{107.4}$$

$$\sin 2x+\sin x = 0 \tag{107.5}$$

Równania, w których niewiadoma x występuje dwojako: pod znakiem funkcji trygonometrycznej i bez niej, np.

$$x+\sin x-1 = 0$$

nie są zaliczane do równań trygonometrycznych i nie będziemy się nimi zajmować.

Omawiając równania trygonometryczne, zajmiemy się najpierw stroną teoretyczną (sprecyzowanie zagadnienia i wprowadzenie terminów), a potem stroną praktyczną (technika rozwiązywania).

Sprecyzowanie zagadnienia. Możliwa jest dwojaka interpretacja równania trygonometrycznego. Według pierwszej rozwiązaniem równania trygonometrycznego jest kąt skierowany (w położeniu standardowym na danej płaszczyźnie), według drugiej – miara kąta skierowanego.

Ponieważ wyznaczenie kąta jest podstawą do wyznaczenia wszystkich miar tego kąta, wprowadzamy następujące dwa terminy odnoszące się do równań trygonometrycznych:

rozwiązanie podstawowe – jest to zbiór wszystkich kątów skierowanych (w położeniu standardowym na danej płaszczyźnie) spełniających dane równanie,

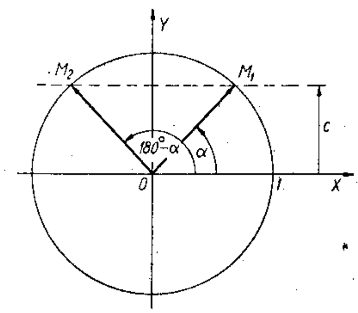
rozwiązanie ogólne – jest to zbiór wszystkich miar wszystkich kątów skierowanych spełniających dane równanie (wszystkie miary tych kątów podajemy przy tej samej jednostce).

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$\sin x = c \tag{107.6}$$

gdzie c jest daną liczbą o wartości bezwzględnej mniejszej od 1.

Wyznaczenie kątów. Przecinając koło trygonometryczne odpowiednią prostą (rys. 107-1), otrzymujemy dokładnie dwa kąty $\sphericalangle \overline{XOM_1}$ i $\sphericalangle \overline{XOM_2}$ spełniające równanie. Każdy z tych dwóch kątów możemy określić za pomocą którejkolwiek



Rys. 107-1

z jego miar stopniowych, np. za pomocą miary głównej. Jeśli jeden z tych kątów ma miarę α, to drugi ma miarę $180^\circ-\alpha$.

Rozwiązanie podstawowe

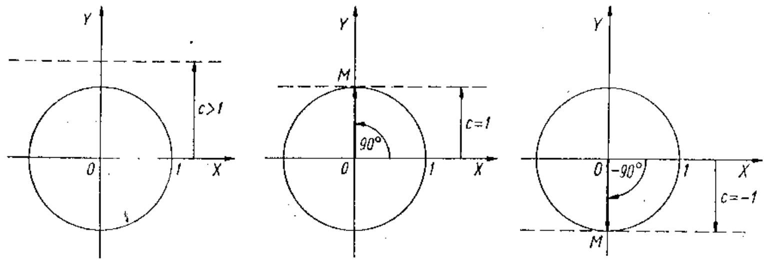
$$x_1 = \alpha \quad x_2 = 180^\circ-\alpha$$

Wyznaczenie miar kątów. Wszystkie miary stopniowe danego kąta otrzymamy, jeśli do jednej miary tego kąta dodamy dowolną całkowitą wielokrotność 360°. Rozwiązanie ogólne

$$x_1 = \alpha+k\cdot 360^\circ \quad x_2 = 180^\circ-\alpha+k\cdot 360^\circ$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Uwaga. Dla $|c| > 1$ równanie (107.6) nie ma rozwiązań. Dla $c = 1$ jedynie kąt o mierze $+90°$, a dla $c = -1$ jedynie kąt o mierze $-90°$ spełnia to równanie (rys. 107-2).



Rys. 107-2

Równanie (107.1) sprowadza się do równania (107.6) i jest $c = \frac{3}{5}$. Z tablicy II odczytujemy (z dokładnością do 1°) $\alpha = 37°$. Zatem rozwiązanie ogólne $x = 37° + k \cdot 360°$ lub $x = 143° + k \cdot 360°$, k – dowolna l. całk.

Definicja 107.1. Każde z poniższych równań

$$\sin x = c \quad \cos x = c \quad \operatorname{tg} x = c \quad \operatorname{ctg} x = c$$

gdzie c jest dowolną liczbą daną, nazywamy *równaniem trygonometrycznym elementarnym.*

Równanie (107.6) jest równaniem trygonometrycznym elementarnym. Poniżej rozwiążemy jeszcze dwa równania trygonometryczne elementarne.

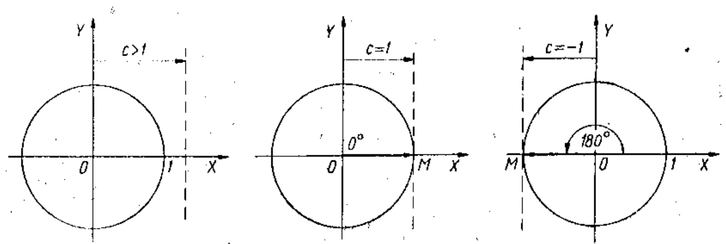
Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$\cos x = c \tag{107.7}$$

Wyznaczenie kątów. Kreśląc koło trygonometryczne i odpowiednią prostą (rys. 107-3) widzimy, że:

– dla $|c| > 1$ równanie nie ma rozwiązania;

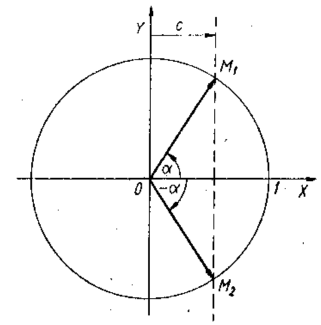
– dla $c = 1$ jedynym rozwiązaniem jest kąt zerowy;



Rys. 107-3

— dla $c = -1$ jedynym rozwiązaniem jest kąt półpełny;

— dla $|c| < 1$ istnieją dokładnie dwa kąty skierowane, wzajemnie przeciwne, spełniające dane równanie; jeśli miarę jednego z nich oznaczymy α, to miarą drugiego jest $-\alpha$ (rys. 107-4).



Rys. 107-4

Równanie $\cos x = c$

Przypadek	Rozwiązanie podstawowe	Rozwiązanie ogólne
$\|c\| > 1$	zbiór pusty	zbiór pusty
$c = 1$	0	$k \cdot 360°$
$c = -1$	180°	$180° + k \cdot 360°$
$\|c\| < 1$	$x = \alpha$ lub $x = -\alpha$	$\pm\alpha + k \cdot 360°$

Przykład numeryczny. Równanie $\cos x = \frac{1}{2}$. Rozwiązanie podstawowe $x = 60°$ lub $x = -60°$. Rozwiązanie ogólne $x = \pm 60° + k \cdot 360°$.

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$\operatorname{tg} x = c \tag{107.8}$$

Wyznaczenie kątów. Wiemy, że $\operatorname{tg} x$ jest funkcją rosnącą w przedziale $(-90°; +90°)$ od $-\infty$ do $+\infty$. Zatem dla dowolnej wartości c istnieje w tym przedziale dokładnie jeden kąt spełniający (107.8). Oznaczmy jego miarę α. Drugi kąt spełniający to równanie ma miarę $\alpha + 180°$ (rys. 107-5).

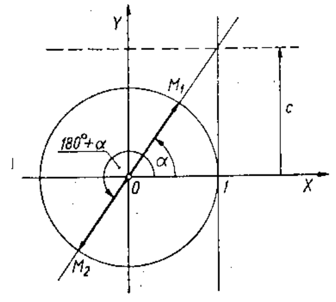
Rozwiązanie podstawowe: $x = \alpha$ lub $x = \alpha + 180°$.

Rozwiązanie ogólne: $x = \alpha + k \cdot 360°$ lub $x = \alpha + 180° + k \cdot 360°$, co można krócej zapisać w jednym wzorze

$$x = \alpha + k \cdot 180° \quad k \text{ – dow.l.całk.}$$

Przykład numeryczny. Równanie $\operatorname{tg} x = 2$. Rozwiązanie podstawowe (odczytane z tablic z dokładnością do 1°) $x = 64°$ lub $x = 64° + 180°$.

Rozwiązanie ogólne $x = 64° + k \cdot 180°$, k — dow. l. całk.



Rys. 107-5

Technika rozwiązywania równań trygonometrycznych. Poniżej podamy kilka wskazówek praktycznych.

Zauważmy, że w każdym z równań (107.1) — (107.3) występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna i tylko jeden argument x tej funkcji. O takim równaniu mówimy, że jest w nim *jedność funkcji* i *jedność argumentu*. Wprowadzając za pomocą stosownego oznaczenia zmienną pomocniczą, otrzymujemy równanie o zmiennej pomocniczej, które już nie jest trygonometryczne, lecz zwykłe liczbowe, zazwyczaj algebraiczne.

Przykład 4. W poniższych tabelkach pokazano jednoczesne rozwiązanie równań (107.1) — (107.3).

	Równanie trygonometryczne	Oznaczenie	Równanie o zmiennej pomocniczej
107.1	$5\sin x - 3 = 0$	$\sin x = s$	$5s - 3 = 0$
107.2	$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$	$\cos x = z$	$2z^2 - z - 1 = 0$
107.3	$\operatorname{tg}^3 x - 4\operatorname{tg} x = 0$	$\operatorname{tg} x = t$	$t^3 - 4t = 0$

Po rozwiązaniu równania o zmiennej pomocniczej, otrzymujemy jego pierwiastki

	Pierwiastki równania o zmiennej pomocniczej
107.1	$s = \frac{3}{5}$
107.2	$z = 1$ lub $z = -\frac{1}{2}$
107.3	$t = 0$ lub $t = 2$ lub $t = -2$

Każdy pierwiastek równania o zmiennej pomocniczej wstawiony do równości wprowadzającej tę zmienną, daje odpowiednie równanie trygonometryczne elementarne

	Równanie trygonometryczne elementarne	Rozwiązanie podstawowe
107.1	$\sin x = \frac{3}{5}$	37° 143°
107.2	$\cos x = 1$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$	0° 120° −120°
107.3	$\operatorname{tg} x = 0$ lub $\operatorname{tg} x = 2$ lub $\operatorname{tg} x = -2$	0° 180° 64° 244° 116° 296°

Mając rozwiązanie podstawowe, łatwo już napisać rozwiązanie ogólne.

Może się zdarzyć, że równanie o zmiennej pomocniczej nie ma pierwiastków. Może się zdarzyć też, że pierwiastek równania pomocniczego daje równanie trygonometryczne elementarne nie mające pierwiastków.

Z kolei zajmiemy się równaniem, w którym jest *jedność argumentu*, ale nie ma *jedności funkcji*. Jedność funkcji wprowadzamy, korzystając ze związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu, co pokażemy na następującym przykładzie.

Przykład 5. Rozwiązać równanie

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - 2\sin x = 0 \qquad (107.4)$$

Podstawiając $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ usuwamy z równania tangens

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2\sin x = 0$$

Podstawiając $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, usuwamy cosinus

$$\frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} - 2\sin x = 0$$

i osiągamy jedność funkcji przy zachowaniu jedności argumentu. Dalej postępujemy, jak w poprzednich przykładach. Stosujemy podstawienie

$$\sin x = s$$

i otrzymujemy równanie o zmiennej pomocniczej

$$\frac{s}{1 - s^2} - 2s = 0$$

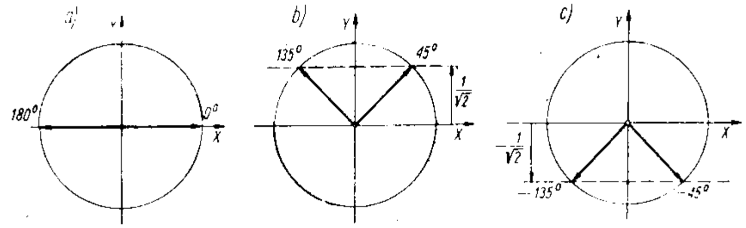
Rozwiązując to równanie, wyznaczamy jego pierwiastki

$$s = 0 \quad \text{lub} \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad s = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Podstawiając te wartości na s do równania $\sin x = s$, otrzymujemy równania elementarne

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad \sin x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Rozwiązując równania elementarne (rys. 107-6) otrzymujemy **rozwiązanie podstawowe**



Rys. 107-6

$$x = 0° \text{ lub } 180° \text{ lub } 45° \text{ lub } 135° \text{ lub } -45° \text{ lub } -135°$$

Rozwiązanie ogólne otrzymamy, dodając do każdej z tych liczb dowolną wielokrotność 360°.

Wreszcie zajmiemy się równaniem, w którym *nie ma jedności argumentu*. Równanie zawierające funkcje trygonometryczne różnych artumentów: x, $2x$, $3x$... wymaga na wstępie stosowania takich wzorów, aby w równaniu pozostał w końcu jeden argument. Może to być jeden z występujących argumentów, np. x, ale może to być też jakiś inny, np. $\frac{x}{2}$. Po wprowadzeniu jedności argumentu można przystąpić do wprowadzania jedności funkcji.

Przykład 6. Rozwiązać równanie

$$\sin 2x + \sin x = 0 \tag{107.5}$$

Podstawiając $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, otrzymujemy jedność argumentu

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

Sprowadzenie do jedności funkcji okazuje się tu zbędne, gdyż równanie jest równoważne alternatywie dwóch równań elementarnych

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązanie podstawowe

$$x = 0° \text{ lub } x = 180° \text{ lub } x = 120° \text{ lub } x = -120°$$

Schematy logiczne rozwiązywania równań. Sprowadzanie równania trygonometrycznego do jedności argumentu i jedności funkcji jest na ogół pożyteczne, ale w niektórych równaniach nie korzysta się z niego. Natomiast ogólnie obowiązujące są *schematy logiczne* rozwiązywania równań, a znamy dwa takie schematy:

— metoda równań równoważnych,
— metoda analizy starożytnych.

Metoda równań równoważnych polega na zbudowaniu ciągu równań, który zaczyna się od równania danego, w którym każde następne równanie jest *równoważne* poprzedniemu, i który kończy się równaniem *ewidentnym*, tj. takim, którego pierwiastki można łatwo odczytać. Tę metodę stosowaliśmy w przykładach 1-6. W metodzie równań równoważnych sprawdzanie pierwiastków nie jest wymagane, ale przy każdorazowym przechodzeniu od jednego równania do następnego trzeba upewnić się, że równanie to jest równoważne poprzedniemu. Jest to niekiedy uciążliwe i wymaga czynienia po drodze różnych zastrzeżeń.

Metoda analizy starożytnych polega na zbudowaniu ciągu równań, który zaczyna się od równania danego, w którym każde następne równanie *wynika* z poprzedniego, a ostatnie jest równaniem ewidentnym.
Ten schemat logiczny zapewnia, że jeśli równanie dane posiada jakiś pierwiastek, to może nim być tylko jeden z pierwiastków równania końcowego, ale bynajmniej nie zapewnia, że każdy pierwiastek równania końcowego musi być pierwiastkiem równania danego. Dlatego każdy pierwiastek równania końcowego może być uznany za pierwiastek równania danego dopiero po sprawdzeniu.

W metodzie tej nie trzeba czynić po drodze żadnych zastrzeżeń, ale sprawdzanie pierwiastków jest obowiązujące.

Przykład 7. Rozwiązać równanie

$$\sin x + 1 = \cos x \tag{107.9}$$

Aby usunąć z równania cosinus, podnosimy do kwadratu obie strony

$$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = \cos^2 x$$

i korzystamy z „jedności trygonometrycznej"

$$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 1 - \sin^2 x$$

Wprowadzając zmienną pomocniczą podstawieniem

$$\sin x = s \tag{107.10}$$

otrzymujemy

$$s^2 + 2s + 1 = 1 - s^2$$

$$2s^2 + 2s = 0$$

$$s(s+1) = 0$$

$$s = 0 \text{ lub } s = -1$$

Wstawiając te wartości do (107.10), otrzymujemy

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1 \qquad (107.11)$$

Jest to równanie końcowe; równanie to ma rozwiązanie podstawowe

$$x = 0^\circ \quad \text{lub} \quad x = 180^\circ \quad \text{lub} \quad x = 270^\circ$$

Sprawdzenie. Podstawiając te wartości kolejno do (107.9), widzimy, że

$x = 0^\circ$ daje $0+1 = 1$, a więc sprawdza
$x = 180^\circ$ daje $0+1 = -1$, a więc nie sprawdza
$x = 270^\circ$ daje $-1+1 = 0$, a więc sprawdza

Odpowiedź: $x = k\cdot 360^\circ$ lub $x = 270^\circ + k\cdot 360^\circ$ (k — dow. l. całk.)

Przykład 8. Rozwiązać równanie

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (107.12)$$

Jest to równanie trygonometryczne elementarne względem kąta $3x$. Kąt ten możemy łatwo wyznaczyć

$$3x = 60^\circ \quad \text{lub} \quad 3x = 120^\circ$$

ale dla wyznaczenia x trzeba zastosować dzielenie kąta (zob. str. 83). Jest to działanie wieloznaczne, a wieloznaczność ta jest związana z wieloznacznością miary kąta. Kłopotów związanych z wieloznacznością dzielenia kąta unikniemy, jeśli przejdziemy od razu do miary wieloznacznej kąta $3x$ (niech k będzie dowolną liczbą całkowitą)

$$3x = 60^\circ + k\cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 3x = 120^\circ + k\cdot 360^\circ$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (107.12)

$$x = 20^\circ + k\cdot 120^\circ \quad \text{lub} \quad x = 40^\circ + k\cdot 120^\circ$$

Przykład 9. Rozwiązać równanie

$$\operatorname{tg} 3x = 1 \qquad (107.13)$$

Postępując jak w przykładzie 3, dostajemy

$$3x = 45^\circ + k\cdot 180^\circ \quad k \text{ — dow. l. całk.}$$

Stąd

$$x = 15^\circ + k\cdot 60^\circ \quad k \text{ — dow. l. całk.}$$

Przykład 10. Rozwiązać równanie

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \qquad (107.14)$$

Stosujemy wzór na sumę cosinusów kątów x i $5x$

$$(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x = 0$$

$$2\cos\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-5x}{2} + \cos 3x = 0$$

$$2\cos 3x\cdot\cos(-2x) + \cos 3x = 0$$
$$2\cos 3x\cdot\cos 2x + \cos 3x = 0$$
$$\cos 3x(2\cos 2x + 1) = 0$$

Stąd wnosimy, że musi być

$$\cos 3x = 0 \quad \text{lub} \quad 2\cos 2x + 1 = 0$$

czyli

$$\cos 3x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 2x = -0{,}5$$

Wyznaczamy rozwiązanie ogólne

$$3x = \pm 90^\circ + n\cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 2x = \pm 120^\circ + n\cdot 360^\circ$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Wynik ten można zapisać w postaci

$$3x = 90^\circ + k\cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad 2x = \pm 120^\circ + k\cdot 360^\circ$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Stąd dostajemy

$$x = 30^\circ + k\cdot 60^\circ \quad \text{lub} \quad x = \pm 60^\circ + k\cdot 180^\circ$$

Przykład 11. Rozwiązać równanie

$$\cos 5x + \sin x = 0 \qquad (107.15)$$

Aby móc stosować wzory na sumę funkcji, należy uprzednio jedną z funkcji zastąpić kofunkcją.

$$\cos 5x + \cos(90^\circ - x) = 0$$

$$2\cos\frac{5x+(90^\circ-x)}{2}\cos\frac{5x-(90^\circ-x)}{2} = 0$$

$$2\cos(2x+45^\circ)\cos(3x-45^\circ) = 0$$

$$\cos(2x+45^\circ) = 0 \quad \text{lub} \quad \cos(3x-45^\circ) = 0$$

$$2x+45^\circ = \pm 90^\circ + n\cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 3x-45^\circ = \pm 90^\circ + n\cdot 360^\circ$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Powyższy wynik można też zapisać w postaci

$$2x+45^\circ = 90^\circ + k\cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad 3x-45^\circ = 90^\circ + k\cdot 180^\circ$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Stąd dostajemy

$$2x = 45^\circ + k\cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad 3x = 135^\circ + k\cdot 180^\circ$$

$$\text{Odp. } x = 22^\circ 30' + k\cdot 90^\circ \quad \text{lub} \quad x = 45^\circ + k\cdot 60^\circ$$

Równanie $a \sin x + b \cos x = c$. Jeśli jedna ze stałych a, b, c jest zerem, równanie rozwiązuje się łatwo. Załóżmy więc, że żadna z tych stałych nie jest zerem.

Metoda kąta połówkowego

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (107.16)$$

$$a\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$(b+c)\sin^2\frac{x}{2} - 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - (b-c)\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

Przypadek $b+c \neq 0$

Dzieląc równanie przez $\cos^2\frac{x}{2}$ mamy

$$(b+c)\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - (b-c) = 0$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$$

Przypadek $b+c = 0$

Wyłączając $\cos\frac{x}{2}$ przed nawias, mamy

$$\cos\frac{x}{2}\left(2a\sin\frac{x}{2} + (b-c)\cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{c-b}{2a} \tag{107.17}$$

Przykład 12

$$4\sin x + 3\cos x = 2 \tag{107.18}$$

Jest to równanie typu (107.16). Stosując (107.17), dostajemy

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5} = -0{,}1165 \quad \text{lub} \quad +1{,}7165$$

$$\frac{x}{2} = 173°21' + k\cdot 180° \quad \text{lub} \quad \frac{x}{2} = 59°46' + k\cdot 180°$$

$$x = 346°42' + k\cdot 360° \quad \text{lub} \quad 119°32' + k\cdot 360°$$

Metoda kąta pomocniczego. Równanie $a \sin x + b \cos x = c$ rozwiązać można za pomocą kąta pomocniczego, co pokażemy, rozwiązując powtórnie równanie (107.18).

Przykład 13.

$$4\sin x + 3\cos x = 2$$

$$\sin x + \frac{3}{4}\cos x = \frac{2}{4}$$

Wprowadzamy kąt pomocniczy φ taki, aby $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{3}{4}$. Taki kąt na pewno istnieje i w I i w III ćwiartce. Wybieramy ten, który jest w I ćwiartce i odczytujemy z tablicy $\varphi = 36°52'$. Ta wartość przyda się nam później. Obecnie w równaniu zastępujemy $\frac{3}{4}$ przez $\mathrm{tg}\,\varphi$

$$\sin x + \mathrm{tg}\,\varphi \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{(mnożymy przez } \cos\varphi)$$

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{1}{2}\cos\varphi$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi \tag{107.20}$$

Wiemy, że $\mathrm{tg}\,\varphi = 3/4$, więc możemy wyznaczyć $\cos\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5}$$

Podstawiając do (107.20), otrzymujemy

$$\sin(x+\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4000$$

Rozwiązanie podstawowe

$$x+\varphi = 23°35' \quad \text{lub} \quad x+\varphi = 180° - 23°35' = 156°25'$$

$$x_1 = 23°35' - \varphi = 23°35' - 36°52' = -13°17' \quad \text{czyli} \quad 346°43';$$

$$x_2 = 156°25' - \varphi = 156°25' - 36°52' = 119°33'$$

Uwaga. Różnica o 1' między wynikami różnych metod przy stosowaniu tablic jest dopuszczalna.

Zadania

Zadanie 1. Znaleźć kąty x z zakresu $0 \leqslant x < 360°$ spełniające równania:

a) $\mathrm{tg}\,x = -0{,}3793$ c) $\sin x = -0{,}3567$

b) $\mathrm{ctg}\,x = 1{,}6932$ d) $\cos x = 0{,}6345$ (odp. str. 221)

Zadanie 2. Rozwiązać równania:

a) $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ c) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$

b) $3 + 3\cos x = 2\sin^2 x$ d) $3\cos x = \sqrt{3}\sin x$

Zadanie 3. Rozwiązać równania:

a) $\mathrm{tg}^4 x - 4\,\mathrm{tg}^2 x + 3 = 0$ (Wskazówka: podstawić $\mathrm{tg}^2 x = u$)

b) $5\sin 2x = 3$ c) $\cos 4x + \cos 2x = 2\cos x$ d) $\sin x + \sin 3x = 0$

e) $\cos x + \cos 5x = 0$ f) $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ g) $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = -1$

h) $\mathrm{tg}\,2x = 3\,\mathrm{tg}\,x$ i) $\frac{\sin 3x}{1-\cos x} = 0$

j) $\frac{6\sin x + 5\cos x}{4\sin x + \cos x} = 2$ (Wskazówka: podzielić licznik i mianownik lewej strony przez $\cos x$ i rozwiązać równanie względem $\mathrm{tg}\,x$)

Zadanie 4. Rozwiązać równania:

a) $8\sin x + 3\cos x = 6$ b) $3\sin x - 2\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $3\sin x + 2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 2\,\mathrm{tg}\,x$

Zadanie 5. Rozwiązać równania (odpowiedzi podajemy obok):

1. $\sin 6x = 0$	$k\cdot 30°$ k — dowolna l. całkowita
2. $\cos 5x = 0$	$18° + k\cdot 36°$
3. $\mathrm{tg}\,10x = 0$	$k\cdot 18°$

4. $\operatorname{ctg} 4x = 0$	$22°30'+k\cdot 45°$
5. $\cos(x+10°) = 0$	$80°+k\cdot 180°$
6. $\sin\frac{5}{2}x = 0$	$k\cdot 72°$
7. $\cos\frac{x}{3} = 0$	$270°+k\cdot 540°$
8. $\operatorname{tg}\frac{3x}{2} = 0$	$k\cdot 120°$
9. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$	$180°+k\cdot 360°$
10. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+50°\right) = 0$	$260°+k\cdot 360°$
11. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$60°+k\cdot 360°,\ 120°+k\cdot 360°$
12. $\sin x = -0{,}5$	$210°+k\cdot 360°,\ 330°+k\cdot 360°$
13. $\sin x = -1$	$270°+k\cdot 360°$
14. $\operatorname{tg} x = 1$	$45°+k\cdot 180°$
15. $\operatorname{tg} x = -1$	$135°+k\cdot 180°$
16. $\operatorname{ctg} x = 1$	$45°+k\cdot 180°$
17. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$	$30°+k\cdot 180°$
18. $\operatorname{tg} x = -0{,}1165$	$173°21'+k\cdot 180°$
19. $\operatorname{tg} x = 1{,}7165$	$59°46'+k\cdot 180°$
20. $\cos 3x = 0{,}5$	$\pm 20°+k\cdot 120°$
21. $\cos 5x+1 = 0$	$36°+k\cdot 72°$
22. $\operatorname{tg} 2x+1 = 0$	$67°30'+k\cdot 90°$
23. $\sin 6x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$10°+k\cdot 60°,\ 20°+k\cdot 60°$
24. $\cos 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\pm 45°+k\cdot 120°$
25. $\sin 4x(\sin 6x-\sin 2x) = 0$	$k\cdot 22°30'$
26. $\sin 3x-\cos 2x = 0$	$18°+k\cdot 72°,\ 90°+k\cdot 360°$
27. $\sin x+\sin 3x = \sin 2x+\sin 4x$	$k\cdot 360°,\ 90°+k\cdot 180°,\ 36°+k\cdot 72°$
28. $\sin 4x+\sin 2x = \cos x$	$90°+k\cdot 180°,\ 10°+k\cdot 120°,\ 50°+$ $+k\cdot 120°$
29. $\sin x+\cos x = 1$	$k\cdot 360°,\ 90°+k\cdot 360°$
30. $4\sin x\cos^3 x = \sin 2x-\cos 2x$	$45°+k\cdot 90°$
31. $2\sqrt{3}\sin^2 x = \cos x$	$\pm 30°+k\cdot 360°,$
32. $\sin^2 x = \sin x$	$k\cdot 180°,\ 90°+k\cdot 360°$
33. $\sqrt{6}\sin^2 x-\sin x-2\sqrt{6} = 0$	nie ma rozwiązań
34. $6\cos^2 x+\sin x-5 = 0$	$30°+k\cdot 360°,\ 150°+k\cdot 360°,$ $199°28'+k\cdot 360°,\ 340°32'+k\cdot 360°$
35. $\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$	$135°+k\cdot 180°$
36. $\operatorname{ctg} x\cdot\cos x-\operatorname{ctg} x-\cos x+1 = 0$	$45°+k\cdot 180°,$

37. $2\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2x = 2$	$71°34'+k\cdot 180°,\ 45°+k\cdot 180°$
38. $\sqrt{3}\sin x\cdot\operatorname{tg} x-\sin x-\sqrt{3}\operatorname{tg} x = -1$	$45°+k\cdot 180°,$
39. $\operatorname{tg} 2x = 9\operatorname{tg} x$	$\pm 41°22'+k\cdot 180°,\quad k\cdot 180°$
40. $4\sin^2 x+\sin^2 2x = 3$	$45°+k\cdot 90°$

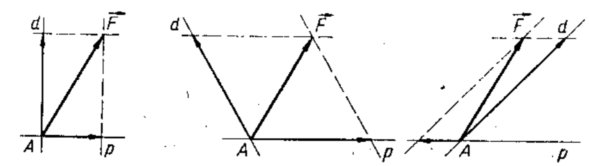
Odpowiedzi do rozdziału XV

98

4. Dla kątów skierowanych nie ma relacji „jest większy". Kąt pełny.

5. Wektor wypadkowy: a) ma kierunek ten sam, co oba składowe; długość równą sumie długości składowych; b) ma kierunek składowego o większej długości i długość równą różnicy długości składowych; w przypadku wektorów przeciwnych (o równych modułach) jest wektorem zerowym; c) wyznacza się według prawa równoległoboku.

7.



Rys. 107-7

9. IV, II, I, III. 10. a) $y = 0$; b) $x = 0$; c) $y > 0$; d) $x > 0$; e) x tego samego znaku, co y, czyli $xy > 0$; f) $x = y > 0$; g) $-x = y > 0$. 11. a) IV ćwiartka; b) ujemna półoś OY.

12. $B(-3, -2)$; $C(3, -2)$; $D(-3, 2)$.

13. $OA = 5$, $OB = 10$, $OC = \sqrt{13}$, $OD = 4$, $OE = 15$, $OF = 5$.

14. a) Jednoznacznie, przy dowolnych wartościach x i y.
  b) Niejednoznacznie (nieskończenie wiele możliwości).
  c) Jeśli $|x| < r$, dwie możliwości; jeśli $|x| = r$, jedna możliwość; jeśli $|x| > r$, niemożliwe.
  d) Jednoznacznie, przy dowolnych wartościach r i φ.
  e) Jednoznacznie, o ile dane nie są sprzeczne między sobą.

100

3. a) $\sin\alpha = \pm\frac{13}{85}$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{13}{84}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{84}{13}$;

b) $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg} = \mp\frac{\sqrt{5}}{2}$;

Rozwiązać nierówności:

450. $\lg^2(x-1)-2\lg(x-1) > 0.$

***451.** $\lg_{\frac{1}{2}} x > \lg_{\frac{1}{3}} x.$

452. $\lg_2(x+14)+\lg_2(x+2) \geqslant 6$

***453.** $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} > 3$

***454.** $\lg_x 2 \cdot \lg_{2x} 2 > \lg_{4x}^2 2$

***455.** $x^{\lg_a x} < a$

456. $\dfrac{1}{\lg_a x} > 1$, gdzie $a > 1$

457. $|3-\lg_2 x| < 1$

458. $3^{\lg_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)} < 1$

459. $\lg_{2x+3} x^2 < 1$

***460.** $\lg_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < 1+\lg_{\frac{1}{3}} \sqrt{4-x^2}$

***461.** $\lg\left(3^{\sqrt{\frac{x(x-4)}{x-3}}}+1\right) \leqslant 1$

462. Wykazać, że

$$\frac{1}{\lg_2 3}+\frac{1}{\lg_5 3} > 2$$

***463.** Wykazać, że

$$|\lg_a b+\lg_b a| \geqslant 2$$

gdzie $a, b > 0$ oraz $a, b \neq 1$.

***464.** Wykazać, że jeżeli $a > 1$; $m, n > 0$ to

$$\frac{\lg_a m+\lg_a n}{2} \leqslant \lg_a \frac{m+n}{2}$$

§ 6. Funkcje trygonometryczne

Sprawdzić tożsamości:

465. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$

466. $\sin 7\alpha \cdot \operatorname{tg} 3{,}5\alpha+\cos 7\alpha = 1$

467. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

468. $\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 4\alpha\sin\alpha = \cos 3\alpha\cos 2\alpha$

469. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}-\dfrac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

Sprowadzić do postaci iloczynowej wyrażenia:

470. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$

471. $1-\sin\alpha+\cos\alpha$

472. $\sin 87^\circ-\sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ$

Uprościć wyrażenia:

473. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$

474. $\sin\alpha-\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}$, jeżeli $\pi < \alpha < 2\pi$

Obliczyć:

475. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{7}{8}\pi\right)$

476. $\cos\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$

477. $\arccos\left(\sin\dfrac{15}{7}\pi\right)$

478. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{13}\right)$

479. $4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$

***480.** Obliczyć bez pomocy tablic

$$\frac{1-4\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}$$

Udowodnić równości:

***481.** $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = \dfrac{1}{8}$

****482.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

***483.** $\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ = \cos 7^\circ$

***484.** Wykazać, że jeżeli α, β, γ są kątami ostrymi i

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{8},\ \text{to}\ \alpha+\beta+\gamma = 45^\circ.$$

485. Wykazać, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, to

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

486. Wykazać, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, to

$$\sin\beta+\sin\gamma-\cos\alpha = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

***487.** Wykazać, że jeżeli $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}$, gdzie $m > n > 0$ i $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, to

$$\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{m}{n}$$

***488.** Dla jakich wartości α zachodzi równość

$$\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{2} = -\sqrt{2}(2+\operatorname{ctg}^2\alpha)$$

***489.** Wykazać, że jeżeli $\cos(\alpha+\beta) = 0$, to

$$\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha$$

***490.** Wyznaczyć $\cos x$ z równania

$$\sin x+\operatorname{ctg} x = \frac{a}{\sin x}, \text{ gdzie } a > 0$$

Podać warunek istnienia rozwiązania.

491. Znaleźć związek między m i n, jeżeli

$$m = \sin x+\cos x \qquad n = \sin^3 x+\cos^3 x$$

Wyznaczyć dziedziny funkcji:

492. $y = \frac{\log(16-x^2)}{\sqrt{\sin x}}$

***493.** $y = \sqrt{\arccos\lg(1-x)}$

494. $y = \sqrt{\lg_a \sin x}$

495. $y = \lg(\sqrt{3}-\operatorname{tg} x)$

496. $y = \arcsin\frac{x-2}{1-3x}$

***497.** $y = \lg_{10-x^2}\operatorname{tg} x$

Sporządzić wykresy funkcji:

498. $y = -\cos 2x$

499. $y = \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$

500. $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$

501. $y = |\sin x|$

502. $y = \frac{|\sin x|}{\cos x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

503. $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$

***504.** $y = |\sin x|+|\cos x|$

505. $y = \frac{1}{\cos x}$

506. $y = \sin x+|\sin x|$

***507.** $y = 2\sin x|\cos x|$

***508.** $y = \arcsin(2x+1)$

***509.** $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$

510. $y = |\operatorname{arctg} x|$

511. $y = \sin(\arcsin x)$

****512.** $y = \frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)$

513. Rozwiązać graficznie nierówność

$$\sin(x+y) > 0$$

514. Rozwiązać graficznie układ nierówności

$$\begin{cases} y-\cos x > 0 \\ y-\sin x < 0 \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

515. Wyznaczyć maksimum funkcji

$$y = \sin x+\cos x$$

***516.** Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia

$$(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2$$

****517.** Znaleźć największą i najmniejszą wartość wyrażenia $a\sin x+b\cos x$, gdzie a i b liczby dane

Rozwiązać równania:

518. $\sin x+\cos x = 1$

519. $\cos 3x = \cos x$

520. $3\sin x = 2\cos^2 x$

521. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\operatorname{tg} x = 0$

522. $\sin^4 x+\cos^4 x = \frac{5}{8}$

523. $\cos x-\cos 3x = \sin x-\sin 3x$

524. $\operatorname{ctg} x-\cos x = \frac{1-\sin x}{2\sin x}$

***525.** $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$

526. $\sin^2 x+\sin^2 2x = \sin^2 3x$

527. $\operatorname{ctg} 8x\operatorname{ctg} 10x = -1$

****528.** $\sin x+\cos x = \sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$

529. $\sin^3 x+\cos^3 x = 1$

530. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}(\alpha-x) = 2\operatorname{tg}\alpha$

***531.** $\sin x+\cos x = \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$

***532.** $2^{4\cos^2 x+1}+16\cdot 2^{4\sin^2 x-3} = 20, \ 0 < x < \pi$

***533.** $2^{\sin^2 x} = 1+2^{\cos^2 x}$

***534.** $\lg_{\sin x}\frac{4}{3} = -2$

****535.** $(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}} = 1$

***536.** $\lg_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x) = 2$

****537.** Dla jakich wartości parametru a równanie

$$\sin^4 x+\cos^4 x = a$$

ma rozwiązanie?

***538.** Dla jakich α z przedziału $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ równanie

$$2x^2-2(2\cos\alpha-1)x+2\cos^2\alpha-5\cos\alpha+2 = 0$$

ma rozwiązanie?

***539.** Dla jakich wartości parametru t pierwiastki równania

$$x^2+\frac{1}{t}x+t^2 = 0$$

można przedstawić w postaci $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \cos\alpha$, $0° < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

Rozwiązać równania:

****540.** $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x = \frac{\pi}{2}$

541. $\arcsin x+\arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$

542. $\sin(5\operatorname{arctg}3x) = 1$

***543.** $\operatorname{arctg}3^x-\operatorname{arctg}3^{-x} = \frac{\pi}{6}$

***544.** $\arcsin(1-x)-2\arcsin x = \frac{\pi}{2}$

545. $\operatorname{arcctg}x = \operatorname{arctg}x$

Rozwiązać nierówności:

546. $\cos x+\operatorname{tg}x < 1+\sin x, \quad 0 < x < 2\pi.$

547. $\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}2x > \frac{2}{\sqrt{3}}$

548. $2\sin^2 3x+\sin^2 6x < 2$

549. $\cos^2 x < \frac{1}{2}$

550. $\sin x > \cos x$

551. $|\sin x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$

***552.** $\lg_{\operatorname{tg}x}(\operatorname{tg}x+6) > 2$

***553.** $\arcsin\lg x > 0$

****554.** $4\lg_{16}\cos 2x+2\lg_4\sin x+\lg_2\cos x+3 < 0$. Wyznaczyć rozwiązanie w przedziale $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Rozwiązać układy równań:

555. $\begin{cases} \dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x} = \operatorname{tg}y \\ x-y = 30° \end{cases}$

556. $\begin{cases} \cos x+\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x+y = 120° \end{cases}$

***557.** Dla jakich wartości liczby a układ równań

$$\begin{cases} \sin x\sin y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x\cos y = a \end{cases}$$

ma rozwiązanie?