47.

3*. 2, 6, i 18; mogą one tworzyć ciąg (2, 6, 18) lub ciąg (18, 6, 2). **4*.** $x = 80$, $y = 200$. **5*.** $a_1 = 3$, $q = \sqrt{2}$ lub $a_1 = 3$, $q = -\sqrt{2}$ lub $a_1 = 1$, $q = 2$ lub $a_1 = 1$, $q = -2$. **6*.** 3, 6, 12; mogą one tworzyć ciąg (3, 6, 12) lub ciąg (12, 6, 3). **7**.** $S_n = \frac{1}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right]$. **8*.** (1, 2, 4, 8, 16) lub $\left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{28}{3}, \frac{-56}{3}, \frac{112}{3}\right)$. **9*.** (2, 4, 8, 12) lub (12,5; 7,5; 4,5; 1,5). **10*.** Ciąg arytmetyczny: (3, 9, 15, ...); ciąg geometryczny: (3, 9, 27, ...). **11*.** 5 cm, 10 cm, 20 cm. **12*.** $m = 0$ lub $m = 3$. **13*.** 1, 2, 4, 6, 8 lub $\frac{32}{3}$, 8, 6, 4, 2.

48.

11*. a) 2, b) 0, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{3}$. **12*.** a) $\bigwedge_{M} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} a_n > M$, b) $\bigwedge_{M} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} a_n < M$.
13. a) granica 1, b) rozbieżny do ∞, c) granica 0.

49.

5. a) $\frac{3}{2}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $2+\sqrt{2}$, d) $2-\sqrt{2}$, e) $\frac{5}{2}$, f) $\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$.

6*. a) $\frac{\pi}{2}a^2$, b) $4(2+\sqrt{2})a$, c) $\pi(2+\sqrt{2})a$. **7*.** $x = \frac{2}{3}$. **8.** a) $\frac{7}{60}$, b) $\frac{3}{11}$, c) $\frac{1}{9}$, d) $\frac{314}{99}$, e) $\frac{37}{300}$. **9*.** $4(2+\sqrt{2})a$. **10*.** a) $3\pi R$, b) $\frac{9}{8}\pi R^2$.

11*. $0 < x < 1$ lub $2 < x < 3$. **12*.** $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$.

Rozdział VIII

FUNKCJA POTĘGOWA, WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA

50. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Znamy już pojęcie potęgi o wykładniku *naturalnym* lub *zerowym*. Wiemy, że podstawowe prawa działań na potęgach wyrażają następujące wzory

$$\begin{aligned} &a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ &a^m : a^n = a^{m-n}, \quad \text{dla } m \geqslant n \text{ i } a \neq 0 \\ &(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\ &\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{dla } b \neq 0 \end{aligned} \tag{50.1}$$

oraz

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Obecnie uogólnimy pojęcie potęgi.

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym. Niech $n \in N$ oraz $a \neq 0$. Określamy:

$$a^{-n} \underset{\text{df}}{=} \frac{1}{a^n} \tag{50.2}$$

Przykłady

$$3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad (\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

$$a^2 \cdot a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}, \quad (a \neq 0),$$

$$\left(\frac{1}{x} : x^{-2}\right) \cdot x^{-1} = \left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) \cdot \frac{1}{x} = 1, \quad (x \neq 0)$$

Potęga o wykładniku będącym odwrotnością liczby naturalnej. Niech $n \in \boldsymbol{N}$ oraz $a \geqslant 0$. Określamy:

$$a^{\frac{1}{n}} \underset{\mathrm{df}}{=} \sqrt[n]{a} \tag{50.3}$$

Zgodnie z powyższą definicją i definicją pierwiastka arytmetycznego potęga $a^{\frac{1}{n}}$ jest liczbą nieujemną, która spełnia równanie $x^n = a$.

Przykłady

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}, \quad \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$$

Potęga o wykładniku wymiernym. Niech $m \in \boldsymbol{N}$ i $n \in \boldsymbol{N}$. Określamy:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &\underset{\mathrm{df}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \quad \text{dla} \quad a \geqslant 0 \\ a^{-\frac{m}{n}} &\underset{\mathrm{df}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-m}, \quad \text{dla} \quad a > 0 \end{aligned} \tag{50.4}$$

Dla potęg o dodatnich podstawach i wymiernych wykładnikach zachowują się prawa działań wyrażone wzorami (50.1). Warunek $m \geqslant n$ podany po drugim z tych wzorów należy przy tym pominąć:

Przykłady

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9, \quad 100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10},$$

$$0^{\frac{1}{3}} = 0, \quad 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{19}{6}} = 2^{3+\frac{1}{6}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 8\sqrt[6]{2}$$

$$3^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

Przykład**

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}} = \left[2\left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[2 \cdot \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{2^5} = \sqrt[9]{32}$$

$$\sqrt{3} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} : 9^2 \cdot 9^{-2} = 3^0 \cdot 9^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Przykład.** Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left[\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 5b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right)\right] : (2a + 3\sqrt{ab})$$

dla $a = 54$, $b = 6$.

Rozwiązanie. Wykonujemy działania w nawiasie kwadratowym

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 5b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= a + 6a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + 5b - (a - 4b) = 6\sqrt{ab} + 9b$$

Upraszczamy następnie obliczane wyrażenie

$$\frac{6\sqrt{ab} + 9b}{2a + 3\sqrt{ab}} = \frac{3\sqrt{b}(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})}{\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})} = 3\sqrt{\frac{b}{a}}$$

wreszcie podstawiamy $a = 54$, $b = 6$.

Odp. 1.

Przykład.** Uprościć wyrażenie

$$Z = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + R^2 \frac{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(R^2 - x^2)\left[1 + \left(\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x}\right)^{-2}\right]}$$

Rozwiązanie. Oznaczając $u = \sqrt{R^2 - x^2}$ mamy

$$Z = u - \frac{x^2}{u} + R^2 \frac{u + \frac{x^2}{u}}{u^2\left(1 + \frac{x^2}{u^2}\right)} = \frac{u^2 - x^2}{u} + R^2 \frac{u^2 + x^2}{u(x^2 + u^2)} =$$

$$= \frac{u^2 - x^2}{u} + \frac{R^2}{u} = \frac{R^2 - x^2 - x^2 + R^2}{u} = \frac{2(R^2 - x^2)}{u} = 2u$$

Odp. $2\sqrt{R^2 - x^2}$.

Potęga o wykładniku niewymiernym. Potęgę a^r można określić w przypadku gdy $a > 0$ i r jest liczbą *niewymierną*. Ideą przewodnią tej definicji jest myśl, żeby wykładnik niewymierny zastąpić jego wymiernym przybliżeniem. Omówimy to określenie na przykładzie potęgi $5^{\sqrt{2}}$.

Bierzemy pod uwagę dwa ciągi przybliżeń dziesiętnych liczby $\sqrt{2}$; jeden z niedomiarem:

$$(1{,}4, \quad 1{,}41, \quad 1{,}414, \quad 1{,}4142, \ldots)$$

drugi z nadmiarem:

$$(1{,}5, \quad 1{,}42, \quad 1{,}415, \quad 1{,}4143, \ldots)$$

Pierwszemu z tych ciągów odpowiada ciąg potęg

$$(5^{1{,}4}, \quad 5^{1{,}41}, \quad 5^{1{,}414}, \quad 5^{1{,}4142}, \ldots) \tag{50.5}$$

natomiast drugiemu — ciąg potęg

$$(5^{1{,}5}, \quad 5^{1{,}42}, \quad 5^{1{,}415}, \quad 5^{1{,}4143}, \ldots) \tag{50.6}$$

Wyrazy tych obu ciągów są potęgami o wykładnikach wymiernych; są one określone pierwszym ze wzorów (50.4). Można udowodnić, że zbiór wyrazów ciągu (50.5) ma kres górny, który jest jednocześnie kresem dolnym zbioru wyrazów ciągu (50.6). Wspólną wartość obu tych kresów przyjmujemy z definicji za potęgę $5^{\sqrt{2}}$.

Analogicznie określa się potęgę przy każdej dodatniej podstawie i każdym niewymiernym wykładniku.

Potęga a^x jest więc określona dla każdego $a > 0$ i dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$. Ponadto okazuje się celowe przyjęcie umowy, że

$$0^x = 0, \quad \text{dla każdego} \quad x > 0 \tag{50.7}$$

Można udowodnić, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$, to wzory (50.1) są prawdziwe dla wszelkich rzeczywistych wykładników m i n.

Przykłady

$$5^{2-\sqrt{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 5^{2-\sqrt{2}} \cdot 5^{\sqrt{2}} = 5^2 = 25$$

$$3^{\sqrt{8}} : 9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^0 = 1$$

Twierdzenie (o porównywaniu potęg). *Jeżeli* $y < x$, to

$$a^y > a^x, \quad \text{dla} \quad 0 < a < 1 \tag{50.8}$$

oraz

$$a^y < a^x, \quad \text{dla} \quad a > 1 \tag{50.9}$$

Dowód pomijamy. Zwracamy uwagę, że dla $a = 1$ mamy $1^x = 1^y = 1$ dla każdego x i dla każdego y.

Wniosek. Podstawiając $y = 0$ do nierówności (50.8) dostajemy

$$a^x < 1, \quad \text{dla} \quad 0 < a < 1 \quad \text{i} \quad x > 0$$

Ten rezultat można rozszerzyć na przypadek, gdy $a = 0$ i $x > 0$, gdyż z uwagi na (50.7) mamy $0^x < 1$. Stąd

$$a^x < 1, \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant a < 1 \quad \text{i} \quad x > 0 \tag{50.10}$$

Podstawiając $y = 0$ do nierówności (50.9), dostajemy

$$a^x > 1, \quad \text{dla} \quad a > 1 \quad \text{i} \quad x > 0$$

Pytania i zadania

1. Podać określenie potęgi a) a^{-n}, gdy $n \in \boldsymbol{N}$, $a \neq 0$,

b) $a^{\frac{1}{n}}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $a \geqslant 0$, c) $a^{\frac{m}{n}}$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $a \geqslant 0$,

d) $a^{-\frac{m}{n}}$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $a > 0$.

2. Podać sposób określenia potęgi o wykładniku niewymiernym.

3. Obliczyć:

a) $\dfrac{6^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{0,75} \cdot 2^{-0,75}}{3\sqrt{2}}$, b) $\left(2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 6\left(1 + 2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right)$,

c) $\left(5^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{2}{3}}\right)^3$, d) $\left(4^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}}\right)^4$

4. Uprościć wyrażenia:

a) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $(x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0)$,

b) $\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{8}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{8}} - 1\right)$, $(x \geqslant 0)$,

c) $\dfrac{2x - 3y}{\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3y}}$ $(x > 0, \quad y > 0)$,

d) $\sqrt[4]{(x^2 + x^{-2})^2 + 8(x^2 + x^{-2}) + 16}$ $(x > 0)$.

5*. Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left[\frac{(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2} \quad \text{dla} \quad x = a\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2mn}}$$

$$a > 0; \quad n > m > 0$$

6.** Obliczyć wartość wyrażenia

$$(\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x})^2 - 4a^2 \cdot \sqrt[m \cdot n]{x^{m+n}} \quad \text{dla} \quad x = (a + \sqrt{a^2 - 1})^{\frac{2mn}{m-n}}.$$

$$a > 1; \quad m \neq n, \quad m \in \boldsymbol{N}, \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

51. Funkcja potęgowa

Definicja. Funkcję

$$y = x^r \tag{51.1}$$

gdzie r oznacza liczbę rzeczywistą, nazywamy *funkcją potęgową* o wykładniku r.

Na przykład

$$y = x^2, \quad y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y = x^{\frac{1}{3}}, \quad \text{czyli} \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = x^{-2}, \quad \text{czyli} \quad y = \frac{1}{x^2}$$

są to funkcje potęgowe.

Dziedzina funkcji (51.1) zależy od wykładnika potęgi r.

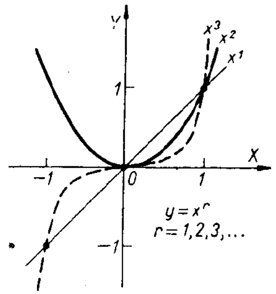
Jeżeli $r \in \boldsymbol{C}$, to dziedziną funkcji potęgowej jest zbiór $\boldsymbol{R}$, gdy $r \geqslant 0$, zaś zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$, gdy $r < 0$. Jeżeli $r \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{C}$, to tą dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$ dla $r > 0$, zaś $\boldsymbol{R}_+$ dla $r < 0$.

Jeżeli $r > 0$, to funkcja (51.1) jest rosnąca w przedziale $< 0; +\infty)$. Istotnie, jeżeli $0 \leqslant x_1 < x_2$, to $0 \leqslant \frac{x_1}{x_2} < 1$, więc na podstawie wniosku z twierdzenia o porównywaniu potęg (str. 232) mamy $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^r < 1$, czyli $x_1^r < x_2^r$.

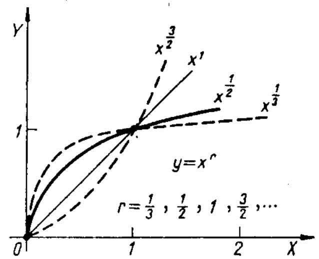
W przypadku wykładników naturalnych funkcja potęgowa jest parzysta, gdy r jest liczbą parzystą, zaś nieparzysta, gdy r jest liczbą nieparzystą.

Na rys. 51-1 i rys. 51-2 przedstawione są wykresy kilku funkcji potęgowych o wykładnikach dodatnich.

Uwaga. Wykres funkcji $y = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \boldsymbol{N}$, sporządzamy zazwyczaj w ten sposób, że na wstępie szkicujemy łatwiejszy do wykonania wykres $y = x^n$ dla $x \geqslant 0$, a nas-



Rys. 51-1



Rys. 51-2

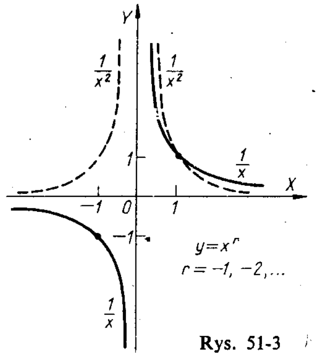
tępnie znajdujemy linię symetryczną do tego wykresu względem prostej $y = x$. Linia tą jest szukanym wykresem funkcji $y = x^{\frac{1}{n}}$, gdyż symetryczne odbicie względem prostej $y = x$ odpowiada zastąpieniu x przez y i y przez x, prowadzi więc od warunków $y = x^n$ i $x \geqslant 0$, do warunków $x = y^n$ i $y \geqslant 0$, czyli do wzoru $y = x^{\frac{1}{n}}$.

Jeżeli $r = 0$, to funkcja (51.1) ma stałą wartość 1 w swej dziedzinie $\boldsymbol{R}$ (w punkcie 0 nadajemy jej wartość 1 — patrz str. 157).

Jeżeli $r < 0$, to funkcja (51.1) jest malejąca w przedziale $(0; +\infty)$. Istotnie, jeżeli $0 < x_1 < x_2$, to $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$, więc na podstawie wniosku z twierdzenia o porównywaniu potęg mamy $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-r} < 1$, czyli $x_1^r > x_2^r$.

W przypadku gdy r jest liczbą całkowitą i ujemną, funkcja potęgowa jest parzysta, gdy $(-r)$ jest liczbą parzystą, zaś nieparzysta, gdy $(-r)$ jest liczbą nieparzystą.

Na rys. 51-3 podane są wykresy funkcji potęgowych o wykładnikach ujemnych.



Rys. 51-3

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja potęgowa?
2. Podać, jaka jest dziedzina funkcji x^r w zależności od r.
3. Udowodnić, że jeżeli r jest liczbą parzystą, to
   a) funkcja x^r jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$,
   b) funkcja $\frac{1}{x^r}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.
4. Udowodnić, że jeżeli r jest liczbą nieparzystą, to
   a) funkcja x^r jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$,
   b) funkcja $\frac{1}{x^r}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

52. Funkcja wykładnicza

Definicja. Funkcję

$$y = a^x, \quad a > 0 \tag{52.1}$$

nazywamy *funkcją wykładniczą*.

Dziedziną funkcji (52.1) jest przedział $(-\infty; \infty)$.

Oto przykłady funkcji wykładniczych:

$$y = 2^x, \quad y = 5^x, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Z twierdzenia o porównywaniu potęg (str. 232) wynika, że:

funkcja a^x jest rosnąca, gdy $a > 1$:

$$a > 1 \text{ i } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

oraz

funkcja a^x jest malejąca, gdy $0 < a < 1$:

$$0 < a < 1 \text{ i } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Dla $a = 1$ funkcja (52.1) jest *stała* i ma wartość 1.

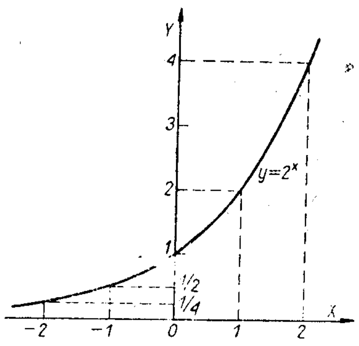
Przykład. Wykreślić funkcję $y = 2^x$.

Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji i na jej podstawie sporządzamy wykres.

Tabl. 52-1

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Odp. Rys. 52-1.



Rys. 52-1

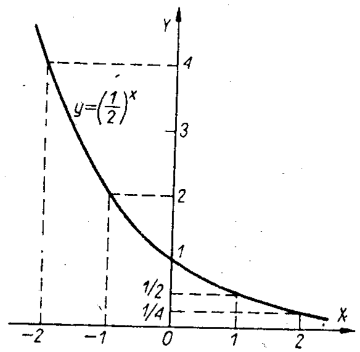
Przykład. Wykreślić funkcję $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji, a następnie sporządzamy wykres.

Odp. Rys. 52-2.

Tabl. 52-2

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Rys. 52-2

Wykres funkcji wykładniczej nazywamy *krzywą wykładniczą*.

Podamy teraz przykłady tzw. *nierówności wykładniczych*; są to takie nierówności, w których niewiadoma znajduje się w wykładniku potęgi.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x > 4$$

Rozwiązanie

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x > 4 \Leftrightarrow 2^{-3x} > 2^2 \Leftrightarrow -3x > 2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$$

Odp. $x < -\frac{2}{3}$.

Przykład*. Rozwiązać nierówność

$$a^{x^2-5x+4} > \frac{1}{a^2}, \quad \text{dla} \quad 0 < a < 1$$

Rozwiązanie. Ponieważ $0 < a < 1$, więc

$$a^{x^2-5x+4} > a^{-2} \Leftrightarrow x^2-5x+4 < -2 \Leftrightarrow x^2-5x+6 < 0$$

Tę ostatnią nierówność rozwiązujemy w znany sposób.

Odp. $2 < x < 3$.

Funkcja wykładnicza ma dwie ważne właściwości:

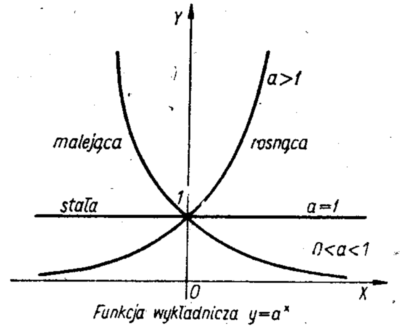
1° przyjmuje tylko dodatnie wartości: $a^x > 0$

oraz

2° $$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \tag{52.2}$$

Ta ostatnia równość, znana z działań na potęgach, ma duże znaczenie w zastosowaniach funkcji wykładniczej.

Na rys. 52-3 przedstawione są schematycznie informacje o zmienności funkcji wykładniczej. Wykres każdej funkcji $y = a^x$ przechodzi przez punkt (0, 1).



Rys. 52-3

Twierdzenie (o równości potęg). *Jeżeli* $a > 0$, $a \neq 1$ *oraz*

$$a^x = a^y \tag{52.3}$$

to $x = y$.

Dowód. Ponieważ $x < y$ albo $x = y$ albo $x > y$, więc wystarczy wykluczyć pierwszą i trzecią z tych relacji. Otóż jeżeli $x < y$, to na podstawie twierdzenia o porównywaniu potęg mamy $a^x > a^y$ gdy $0 < a < 1$, zaś $a^x < a^y$ gdy $a > 1$, więc równość (52.3) nie jest spełniona. Podobnie wykluczamy nierówność $x > y$, więc pozostaje równość $x = y$, cnd.

Uwaga. Jeżeli $a = 0$ albo $a = 1$, to z równości potęg (52.3) nie można niczego sądzić o równości wykładników x i y, co potwierdzają następujące przykłady: $0^3 = 0^5$, $1^2 = 1^0$.

Równania wykładnicze. Twierdzenie o równości potęg stanowi podstawę przy rozwiązywaniu *równań wykładniczych*, tzn. takich równań, w których niewiadoma jest w wykładniku potęgi. Podamy teraz przykłady takich równań.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$2^{x^2-5x+10} = 64 \tag{52.4}$$

Rozwiązanie. Prawą stronę równania możemy przedstawić jako 2^6, więc na podstawie twierdzenia o równości potęg $x^2-5x+10 = 6$. Otrzymaliśmy zatem równanie kwadratowe $x^2-5x+4 = 0$, które rozwiązujemy w znany sposób.

Odp. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$2^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{x-1}} \tag{52.5}$$

Rozwiązanie. Pisząc prawą stronę równania (52.5) w postaci $2^{\frac{2x}{x-1}}$, a następnie przyrównywając wykładniki potęg, dostajemy

$$\frac{1}{x} = \frac{2x}{x-1} \quad \text{skąd} \quad 2x^2-x+1 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe o ujemnym wyróżniku, $\Delta = 1-8 = -7 < 0$.

Odp. Równanie nie ma pierwiastków

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4 \tag{52.6}$$

Rozwiązanie. Oznaczając

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = a \quad \text{mamy} \quad \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-3}{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{a}$$

Równanie (52.6) można więc zapisać następująco:

$$\frac{1}{a^x} + a^x = 4 \quad \text{czyli} \quad (a^x)^2 - 4a^x + 1 = 0$$

Wprowadzamy nową niewiadomą $z = a^x$. Otrzymujemy równanie kwadratowe

$z^2-4z+1 = 0$, którego pierwiastkami są liczby $z_1 = 2-\sqrt{3}$ oraz $z_2 = 2+\sqrt{3}$. Jeżeli $a^{x_1} = 2-\sqrt{3} = \frac{1}{a^2}$, to $x_1 = -2$; jeżeli $a^{x_2} = 2+\sqrt{3} = a^2$, to $x_2 = 2$.

Odp. $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja wykładnicza?
2. Dla jakich podstaw a funkcja a^x jest a) rosnąca, b) malejąca, c) stała?
3. Wykreślić na wspólnym rysunku funkcje $y = 2^x$ i $y = 3^x$ a następnie zbadać, która z nich ma większą wartość a) dla $x = -1$, b) dla $x = 1$.
4. Sporządzić wykres funkcji:

   a) $y = 2^{x+2}$, b) $y = 3^{x-1}$, c) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x+4}$.

5. Rozwiązać równania:

   a) $4^{2x-5} = 256$, b) $3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$, c) $2^{2x-1} \cdot 3^x = 72$,

   d) $3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0$, e) $2^{x+1} + 2^{x+3} + 320 = 2^{x+2} + 2^{x+4}$.

6. Rozwiązać nierówności:

   a) $\frac{1}{2^x+2} < \frac{2^x}{2^x-1}$, b) $1 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$, c) $27^{-3x} > 81$,

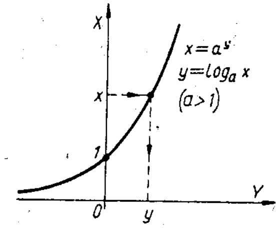
   d) $2^{3x+5} - 4^{x-1} > 0$, e) $3^{\frac{1}{x}} < 3^{2x}$.

53. Logarytmy

Z własności funkcji wykładniczej wynika, że jeżeli liczby a i x są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna liczba y taka, że

$$a^y = x \tag{53.1}$$

(rys. 53-1). Liczbę y spełniającą warunek (53.1) nazywamy logarytmem liczby x przy podstawie a i oznaczamy symbolem $\log_a x$.



Rys. 53-1

Definicja. *Logarytmem* liczby $x > 0$ przy *podstawie* a ($a > 0$ i $a \neq 1$) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a, żeby otrzymać x.

Mamy więc

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \qquad (53.2)$$

Przykłady

$\log_2 4 = 2$, ponieważ $2^2 = 4$; $\log_3 3 = 1$, ponieważ $3^1 = 3$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$, ponieważ $(\sqrt{2})^2 = 2$

$\log_{12} 1 = 0$, ponieważ $12^0 = 1$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, ponieważ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

Zwracamy uwagę, że logarytm liczby dodatniej może być dodatni, ujemny lub równy zeru:

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_2 \frac{1}{8} = -3, \quad \log_2 1 = 0$$

Z określenia logarytmu wynika, że

$$\log_a 1 = 0$$

natomiast logarytm liczby będącej jednocześnie podstawą logarytmu jest równy 1

$$\log_a a = 1$$

Z definicji (53.2) wynikają ponadto dwie tożsamości:

$$\log_a a^y = y \quad \text{oraz} \quad a^{\log_a x} = x, \quad \text{dla} \quad x > 0 \qquad (53.3)$$

Na przykład

$$\log_7 7^5 = 5, \quad 2^{\log_2 5} = 5, \quad 5^{\log_5 16} = 16$$

Liczba 0 i liczby ujemne nie mają logarytmów, gdyż potęga a^y, ($a > 0$, $a \neq 1$), nie jest zerem i nie jest ujemna dla żadnej wartości y.

W dalszym ciągu ilekroć będzie mowa o logarytmie należy pamiętać, że podstawa logarytmu jest liczbą dodatnią i różną od 1.

Podamy teraz twierdzenia dotyczące właściwości logarytmów.

Twierdzenie (o logarytmie iloczynu). *Jeżeli* $x > 0$ i $y > 0$, *to*

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (53.4)$$

Dowód. Oznaczamy $\log_a x = p$, $\log_a y = q$. Z określenia logarytmu $x = a^p$, $y = a^q$. Stąd $xy = a^p a^q = a^{p+q}$, więc $\log_a (xy) = p+q = \log_a x + \log_a y$, cnd.

Wzór (53.4) czytamy krótko:

logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów

Przykłady

$\log_2 12 = \log_2 (3 \cdot 4) = \log_2 3 + \log_2 4 = \log_2 3 + 2$

$\log_3 36 = \log_3 (3^2 \cdot 4) = \log_3 3^2 + \log_3 4 = 2 + \log_3 4$

$\log_a (xyz) = \log_a (xy) + \log_a z = \log_a x + \log_a y + \log_a z$

$(x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0)$

Twierdzenie (o logarytmie ilorazu). *Jeżeli* $x > 0$ i $y > 0$, *to*

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad (53.5)$$

Dowód. Oznaczamy $\log_a x = p$, $\log_a y = q$. Z określenia logarytmu $x = a^p$, $y = a^q$. Stąd $\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, więc $\log_a \frac{x}{y} = p - q = \log_a x - \log_a y$, cnd.

Wzór (53.5) czytamy krótko:

logarytm ilorazu równa się różnicy logarytmów

Przykłady

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b = 0 - \log_a b = -\log_a b \quad (b > 0)$$

$$\log_a \frac{xy}{z} = \log_a (xy) - \log_a z = \log_a x + \log_a y - \log_a z$$

$$(x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0)$$

Twierdzenie (o logarytmie potęgi). *Jeżeli* $x > 0$, *to dla każdej liczby rzeczywistej* n

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \qquad (53.6)$$

Dowód. Oznaczamy $\log_a x = p$. Stąd $a^p = x$, więc $x^n = (a^p)^n = a^{pn}$, czyli $\log_a x^n = p \cdot n = n \cdot \log_a x$, cnd.

Wzór (53.6) czytamy krótko:

logarytm potęgi równa się iloczynowi wykładnika przez logarytm podstawy

Przykłady

$\log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$; $\quad \log_a a^3 = 3 \log_a a = 3 \cdot 1 = 3$

$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2 = 6$; $\quad \log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}$

$$\log_a x^2 = \begin{cases} 2 \log_a x & \text{dla} \quad x > 0 \\ 2 \log_a (-x) & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Przykład*. Obliczyć

$$x = 25^{1-\log_5 3} + 2 \cdot 7^{-\log_7 9}$$

Rozwiązanie. Mamy

$$25^{1-\log_5 3} = 5^{2(1-\log_5 3)} = 5^{2-2\log_5 3} = 5^{\log_5 25 - \log_5 9} = 5^{\log_5 \frac{25}{9}} = \frac{25}{9}$$

Ponadto

$$7^{-\log_7 9} = (7^{\log_7 9})^{-1} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$$

Stąd
$$x = \frac{25}{9} + 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{27}{9} = 3$$
Odp. 3.

Przykład*. Udowodnić wzór
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \tag{53.7}$$

Rozwiązanie. Liczby a i b są tu podstawami logarytmów, więc są dodatnie i różne od jedności. Oznaczmy $\log_a b = x$ i $\log_b a = y$. Mamy więc $a^x = b$ i $b^y = a$, czyli $(b^y)^x = b$, skąd $b^{yx} = b^1$. Na podstawie twierdzenia o równości potęg (str. 237) dostajemy $yx = 1$, czyli $\log_b a \cdot \log_a b = 1$, cnd.

Na przykład
$$\log_2 4 = \frac{1}{\log_4 2}, \qquad \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$$

Przykład*. Udowodnić wzór
$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x, \quad (x > 0) \tag{53.8}$$

Rozwiązanie. Oznaczmy $\log_a x = p$ oraz $\log_b x = q$. Stąd $x = a^p$ i $x = b^q$, więc $a^p = b^q$. Równe liczby dodatnie mają równe logarytmy, a zatem $\log_b a^p = \log_b b^q$, czyli $p \log_b a = q \log_b b$, więc ostatecznie $p \log_b a = q$, cnd.

Na przykład jeżeli $\log_2 x = 0{,}6$, to
$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 2 \cdot \log_2 x = -1\cdot 0{,}6 = -0{,}6$$

Równość (53.8) nazywamy wzorem na *zmianę podstawy logarytmu*.

Pytania i zadania

1. Podać określenie *logarytmu*.
2. Jakie warunki spełnia *podstawa* logarytmu?
3. Wypowiedzieć twierdzenie o logarytmie a) iloczynu, b) ilorazu, c) potęgi.
4. Podać wzór na zmianę podstawy logarytmu.
5. Obliczyć na podstawie określenia logarytmu

   a) $\log_7 243$, b) $\log_3 \frac{1}{27}$, c) $\log_2 \frac{1}{8}$, d) $\log_{\sqrt{2}} 16$,

   e) $\log_{7\sqrt{7}} 49$, f) $\log_2 \sqrt[3]{4}$, g) $\log_3 1$, h) $\log_{10} 10$.
6. Obliczyć $\log_4 x - 2\log_{16} x$.

7*. $\log_3 x = a$; obliczyć $\log_{27} x$.

8*. $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$; obliczyć $\log_3 5$.

9**. Udowodnić równość
$$\log_{10} 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \ldots \log_{10} 9$$

10**. $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$; obliczyć $\log_{abc} x$.

54. Funkcja logarytmiczna

Definicja. Funkcję
$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \tag{54.1}$$
nazywamy *funkcją logarytmiczną*. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R}_+$.

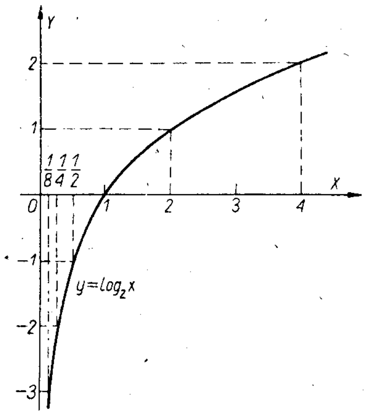
Przykład. Wykreślić funkcję $y = \log_2 x$.

Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji korzystając z określenia logarytmu.

Tabl. 54-1

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−3	−2	−1	0	1	2

Odp. Rys. 54-1.



Rys. 54-1

Przykład. Wykreślić funkcję $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

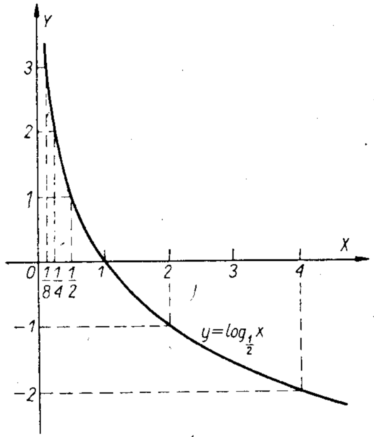
Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji.

Tabl. 54-2

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	3	2	1	0	−1	−2

Odp. Rys. 54-2.

Funkcja $y = \log_a x$ odwzorowuje zbiór $\boldsymbol{R}_+$ na zbiór $\boldsymbol{R}$, zaś funkcja $x = a^y$ odwzorowuje zbiór $\boldsymbol{R}$ na $\boldsymbol{R}_+$. Z uwagi na równoważność (53.2), każde z tych odwzorowań jest odwrotne względem drugiego (por. str. 36), więc wykres funkcji logarytmicznej jest linią symetryczną do wykresu funkcji wykładniczej (o tej samej podstawie) względem prostej $y = x$ (rys. 54-3).



Rys. 54-2

Z określenia logarytmu oraz z twierdzenia o porównywaniu potęg wynika, że

$$\text{funkcja } \log_a x \text{ jest rosnąca, gdy } a > 1:$$

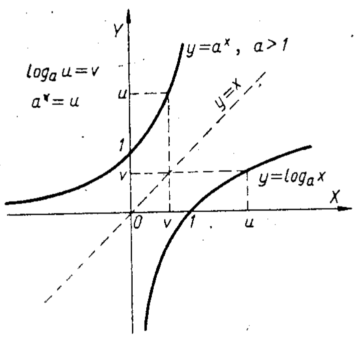
$$(a > 1 \ \text{ i } \ 0 < x_1 < x_2) \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

oraz

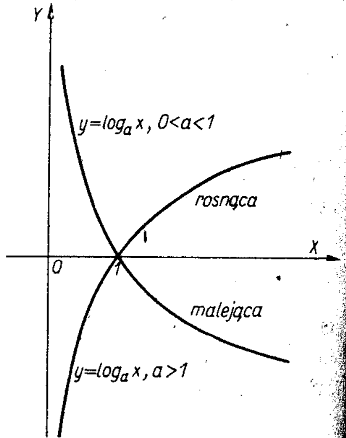
$$\text{funkcja } \log_a x \text{ jest malejąca, gdy } 0 < a < 1:$$

$$(0 < a < 1 \ \text{ i } \ 0 < x_1 < x_2) \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

(rys. 54-4).



Rys. 54-3



Rys. 54-4

Przykład. Dla jakich wartości x określona jest funkcja

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+4)} \tag{54.2}$$

Rozwiązanie. Funkcja (54.2) jest określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\log_{\frac{1}{2}}(x+4) \geqslant 0$, czyli gdy $0 < x+4 \leqslant 1$ (rys. 54-4, przypadek $0 < a < 1$). Stąd $-4 < x \leqslant -3$.

Odp. $-4 < x \leqslant -3$.

Równania logarytmiczne. Podamy teraz przykłady rozwiązywania *równań logarytmicznych*; są to równania, w których niewiadoma jest pod znakiem logarytmu (lub w jego podstawie).

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\log_a(x+\sqrt{3}) = -\log_a(x-\sqrt{3}) \tag{54.3}$$

Rozwiązanie (analiza starożytnych). Jeżeli liczba x spełnia równanie (54.3), to spełnia także równanie

$$\log_a(x+\sqrt{3}) + \log_a(x-\sqrt{3}) = 0$$

czyli

$$\log_a[(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})] = 0, \quad \text{więc} \quad \log_a(x^2-3) = 0.$$

Z określenia logarytmu $x^2-3 = a^0 = 1$, a zatem $x^2 = 4$. Stąd $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Liczba -2 nie jest pierwiastkiem równania (54.3), gdyż suma $-2+\sqrt{3}$ jest ujemna i $\log_a(-2+\sqrt{3})$ nie istnieje. Natomiast liczba 2 spełnia równanie (54.3), ponieważ

$$\log_a(2+\sqrt{3}) = \log_a\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = \log_a\frac{1}{2-\sqrt{3}} = -\log_a(2-\sqrt{3})$$

Odp. $x = 2$.

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\frac{1}{5-\log_2 x} + \frac{2}{1+\log_2 x} = 1 \tag{54.4}$$

Rozwiązanie. Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $z = \log_2 x$. Równanie (54.4) przyjmuje więc postać

$$\frac{1}{5-z} + \frac{2}{1+z} = 1 \quad \text{skąd} \quad z^2-5z+6 = 0$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki $z_1 = 2$ oraz $z_2 = 3$. Z warunku $\log_2 x_1 = 2$ dostajemy $x_1 = 4$, zaś z warunku $\log_2 x_2 = 3$ dostajemy $x_2 = 8$. Sprawdzenie otrzymanych rozwiązań pozostawiamy Czytelnikowi.

Odp. $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.

A oto przykłady równań *logarytmiczno-wykładniczych.*

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\log_2(9-2^x) = 3-x$$

Rozwiązanie. Korzystamy z określenia logarytmu

$$9-2^x = 2^{3-x} \quad \text{więc} \quad 9-2^x = 8\cdot\frac{1}{2^x}$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $z = 2^x$ otrzymując

$$9-z = 8\cdot\frac{1}{z} \quad \text{czyli} \quad z^2-9z+8 = 0$$

stąd $z_1 = 1$, $z_2 = 8$, czyli $2^{x_1} = 1$, $2^{x_2} = 8$; ostatecznie $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Sprawdzenie obu pierwiastków pozostawiamy Czytelnikowi.

Odp. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Przykład.** Rozwiązać równanie

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \tag{54.5}$$

Rozwiązanie (metoda równań równoważnych). Będziemy poszukiwać pierwiastków równania (54.5) wyłącznie w zbiorze $\boldsymbol{R}_+$, gdyż dla $x < 0$ nie ma sensu $\sqrt{x}$, zaś dla $x = 0$ nie ma sensu $x^{\sqrt{x}}$. Spostrzegamy, że liczba $x_1 = 1$ spełnia równanie (54.5).

Dla $x > 0$ i $x \neq 1$ mamy

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \Leftrightarrow \sqrt{x}\log_x x = x\log_x\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 4$$

Odp. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Przykład.** Rozwiązać równanie

$$\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x = 1$$

Rozwiązanie. Skorzystamy ze wzoru (53.8) na zmianę podstawy logarytmu. Mamy

$$\log_3 x = \log_3 2\cdot\log_2 x, \quad \log_4 x = \log_4 2\cdot\log_2 x = \frac{1}{2}\log_2 x$$

Równanie dane można więc zapisać tak

$$\log_2 x+\log_3 2\cdot\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x = 1$$

stąd

$$\left(\frac{3}{2}+\log_3 2\right)\log_2 x = 1, \quad \log_2 x = \frac{2}{3+2\log_3 2}$$

Odp. $x = 2^{\frac{2}{3+\log_3 4}}$

Nierówności logarytmiczne. Ograniczymy się do prostych przykładów.

Przykład. Rozwiązać układ nierówności

$$2 \leqslant \log_{\sqrt{2}}(2x-8) \leqslant 3 \tag{54.6}$$

Rozwiązanie. Ponieważ funkcja logarytmiczna o podstawie większej od jedności jest rosnąca, więc układ nierówności (54.6) jest równoważny układowi

$$(\sqrt{2})^2 \leqslant 2x-8 \leqslant (\sqrt{2})^3, \quad \text{czyli} \quad 2 \leqslant 2x-8 \leqslant 2\sqrt{2}$$

Odp. $5 \leqslant x \leqslant 4+\sqrt{2}$.

Przykład*. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{\log_a x} > 1, \quad \text{gdy} \quad a > 1 \tag{54.7}$$

Rozwiązanie. Oznaczamy $u = \log_a x$ i przepisujemy nierówność (54.7) w postaci

$$\frac{1}{u} > 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{1-u}{u} > 0$$

Stąd $0 < u < 1$, więc $0 < \log_a x < 1$. Ponieważ $a > 1$, więc ostatnia nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $1 < x < a$.

Odp. $1 < x < a$.

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja logarytmiczna?
2. Jaka jest dziedzina funkcji logarytmicznej?
3. Wykreślić na wspólnym rysunku funkcje:

   $y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = \log_2 x, \quad y = \log_3 x.$
4. Sporządzić wykresy funkcyj:

   a) $y = \log_2 8x$, b) $y = \log_3 \frac{x}{9}$, c) $y = \log_{10}(x+5)$.
5. Znaleźć dziedziny funkcyj:

   a) $y = \log_2 x+\sqrt[3]{-x}$, b) $y = \log_4 x+\sqrt{-x}$, c) $y = \log_2 \frac{x}{x+1}$.
6. Wykreślić na wspólnym rysunku funkcje:

   a) $y = 2^x$ i $y = \log_2 x$, b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
7. Dla jakich wartości a funkcja $y = \log_a x$ jest *rosnąca*, dla jakich zaś *malejąca*?
8. Rozwiązać równania:

   a) $\log_3[\log_5(2x+1)] = 0$, b) $\log_3(5x+1)-\log_3(x-1) = 2$,

   c) $\log_4[\log_2(x-5)] = 1$, d) $3\log_3(x+1) = \log_3(x^3+2x^2+4x+7)$.

9*. Rozwiązać równania:

   a) $\log_a x+\log_a(x+1) = 0$, b) $\log_a(2^x+4^x)-\log_a 8 = \log_a\left(2^{2x-1}-\frac{1}{4}\right)$,

   c) $\log_x 10+\log_{x^2} 10 = 6$, d) $x^{\log_{10} x} = 100x$.

319. $y=\dfrac{x^4-1}{|x^2-1|}$ 320. $y=\dfrac{2x(1+x^2)}{2|x|}$

321. Wykazać, że funkcja $y=x+\frac{1}{x}$ może przyjmować jedynie wartości $y\leqslant -2$ lub $y\geqslant 2$. Wyznaczyć ekstrema i sporządzić wykres tej funkcji.

322. Iloczyn pewnych trzech liczb pierwszych równa się ich pięciokrotnej sumie. Co to za liczby?

323. Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 11, zaś suma kwadratów tych cyfr wynosi 45. Jeżeli od szukanej liczby odejmiemy 198, to otrzymamy liczbę zbudowaną z tych samych cyfr ale przestawionych. Znaleźć tę liczbę.

324. Mianownik ułamka będącego ilorazem dwóch liczb całkowitych jest mniejszy o 1 od kwadratu licznika tego ułamka. Jeżeli do licznika i mianownika ułamka dodamy 2, to wartość ułamka będzie większa od $\frac{1}{4}$, jeżeli zaś od licznika i mianownika odejmiemy 3, to wartość ułamka będzie mniejsza od $\frac{1}{10}$. Znaleźć ten ułamek.

§ 4. Funkcja wykładnicza

Wyznaczyć dziedziny funkcji:

325. $y=2^{\sqrt{x+1}}$ 326. $y=\sqrt{2^{-x}-\frac{1}{2}}$

327. $y=\dfrac{1}{1-2^{1-|x|}}$

Sporządzić wykresy funkcji:

328. $y=-2^x+1$ 329. $y=-3^{x-1}+2$

330. $y=2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 331. $y=2^{x+|x|}$

332. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ *333. $y=2^{\frac{x^2}{|x|}}$

334. $y=2^x-2^{|x|}+1$ *335. $y=|1-2^x|$

Rozwiązać równania:

336. $5^x-5^{3-x}=20$ 337. $49^x-6\cdot 7^x+5=0$

338. $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ 339. $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

*340. $2^{3x}\cdot 7^{x-2}=4^{x+1}$ 341. $\dfrac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}-1}}=1{,}5$

*342. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$ *343. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$

*344. $8^x+18^x-2\cdot 27^x=0$ *345. $2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}}+2^{2x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}$

346. $16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{1}{4}x}}=\sqrt{2^{x-1}}$ *347. $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}}$

*348. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$ 349. $x^{x^2-5x+6}=1$

*350. $\sqrt{x^x}=x^{\sqrt{x}}$ **351. $2^{-|x|}=\frac{1}{2}(|x+1|+|x-1|)$

*352. Rozwiązać równanie

$$0{,}25^{0{,}5x(x-1)-0{,}75}=\sqrt[4]{0{,}5^{m-1}}$$

podać warunek istnienia pierwiastków oraz obliczyć pierwiastki dla $m=-5$.

353. Przy jakich wartościach m dwa różne pierwiastki równania

$$0{,}5^{x^2-mx+0{,}5m-1{,}5}=(\sqrt{8})^{m-1}$$

są dodatnie?

Rozwiązać układy równań:

354. $\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}\\ (x+y)2^{y-x}=3\end{cases}$ 355. $\begin{cases}8^{x-2}\cdot 4^{y+1}=16\\ 2^{2(x-1)}\cdot 8^y=1\end{cases}$

356. $\begin{cases}64^{2x}+64^{2y}=12\\ 64^{x+y}=4\sqrt{2}\end{cases}$ 357. $\begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1}\\ 5\cdot 5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}\end{cases}$

358. $\begin{cases}3^y\cdot 4^x=18\\ 4^y\cdot 9^x=48\end{cases}$ *359. $\begin{cases}y^{x^2+7x+12}=1\\ x+y=6\end{cases}$

*360. $\begin{cases}y^{x^2+x+2}=1\\ x+y=3\end{cases}$ 361. $\begin{cases}x^{x+y}=y^{x-y}\\ x^2y=1\end{cases}$

*362. $\begin{cases}x^{x^2}=y\\ x^{4x-1}=y^4\end{cases}$

*363. Wykazać, że dla dowolnego x oraz $a>0$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a^x+a^{-x}-1}\leqslant 1$$

364. Która liczba jest większa: $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ czy $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$?

Rozwiązać nierówności:

365. $x^2\cdot 2^x+x\cdot 2^{x-1}>0$ 366. $0{,}5^{\frac{x+1}{x-1}}>\frac{1}{32}$

367. $\dfrac{1}{2^x-1} > \dfrac{1}{1-2^{x-1}}$

368. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1-x} \geqslant 1$

369. $3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

****370.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$

***371.** $x^{\frac{3}{4}x} < (\sqrt{x})^{x^2-x+1}$

****372.** $(x^2+x+1)^x < 1$

***373.** $|x|^{x^2-x-2} < 1$

374. Dla jakich x wyrażenie $\dfrac{1}{2^x+2^{-x}}$ przyjmuje wartości z przedziału $\left(-1;\ \dfrac{2}{5}\right)$?

§ 5. Funkcja logarytmiczna

375. Wykazać, że jeśli $a, p, q > 0$ i $p, q \neq 1$, to zachodzi równość

$$\lg_p a = \frac{\lg_q a}{\lg_q p}$$

Obliczyć:

376. $\lg_{3\sqrt{3}} 27$

***377.** $\lg_3 5 \lg_{25} 27$

378. $2^{\lg_{2\sqrt{2}} 15}$

***379.** $(\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{5 \lg_5 3}}$

380. $\lg_9 \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{6}$

381. $2^{\lg_3 5}-5^{\lg_3 2}$

382. $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$

***383.** $\lg_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, jeżeli $\lg_{ab} a = 4$

384. Uprościć wyrażenie

$$x = \lg_2 3 \lg_3 4 \lg_4 5 \dots \lg_{15} 16$$

385. Wykazać, że jeżeli $m, n > 0$, $m \neq 1$, to

$$\lg_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = \lg_m n$$

***386.** Uporządkować według wielkości liczby: $\lg_3 6$, $\lg_4 8$, $\lg_3 5$ nie posługując się tablicami logarytmów.

387. Która z liczb jest większa: $\lg_2 a$ czy $\lg_3 a$?

****388.** Wykazać, że jeśli

$$x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}} \qquad y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$$

to

$$z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$$

****389.** Znaleźć liczbę, która daje się jednoznacznie przedstawić jako iloczyn dwóch liczb dodatnich takich, że różnica ich logarytmów o podstawie 2 jest równa ilorazowi tych logarytmów.

***390.** Znaleźć liczbę, której logarytm przy podstawie 10 jest większy o 1 od logarytmu liczby $a+\dfrac{1}{10}a$ przy podstawie 100.

Wyznaczyć dziedziny funkcji:

391. $y = \lg_2 \left[1-\lg_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)\right]$

392. $y = \sqrt{\lg_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{x^2-1}}$

***393.** $y = \sqrt{\lg_x(3-x)}$

394. Dla jakich wartości x określone jest wyrażenie

$$\sqrt{\lg_{0,1}(2x-1)+\lg_{0,1}(5-3x)}$$

Sporządzić wykresy funkcji:

395. $y = -\lg_2 x+1$

396. $y = \lg_3(x-1)$

397. $y = \lg_{\frac{1}{2}}(2-x)$

398. $y = \lg_3|x-1|$

399. $y = |\lg_2 x|$

***400.** $y = \dfrac{\lg_2 x^2}{|\lg_2 x|}$

***401.** $y = \lg_x 2$

***402.** $y = \lg_2 \lg_2 x$

***403.** $y = 2^{\left|\lg_{\frac{1}{2}} x\right|}$

404. Czym różni się wykres funkcji $y = \lg_3 x^2$ od wykresu funkcji $y = 2\lg_3 x$?

****405.** Rozwiązać graficznie nierówność

$$\lg_x \lg_y x > 0$$

Rozwiązać graficznie układy nierówności:

406. $\begin{cases} y > \lg_2 x \\ y < 2 \end{cases}$

407. $\begin{cases} y > \lg_2 x \\ y < 4^x \\ x < 1 \end{cases}$

Rozwiązać równania:

408. $\lg(x-2)-\lg(4-x) = 1-\lg(13-x)$

409. $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1 = \lg 30$

410. $\lg(0,5+x) = \lg 0,5-\lg x$

411. $\frac{1}{1+\lg x}+\frac{5}{3-\lg x}=3$

412. $\lg_2(9-2^x)=3-x$

*413. $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^2-1)=1$

414. $\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3$

*415. $\lg_x 5\sqrt{5}-\frac{5}{4}=(\lg_x\sqrt{5})^2$

*416. $5^{\lg x}+5^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}+3^{\lg x-1}$

*417. $6^{\lg_6^2 x}+x^{\lg_6 x}=12$

*418. $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2$

419. $\lg 73-\lg(x^3-1)=3\lg 2-\lg x-\lg(x-1)$

*420. $\lg 9^{-1}+x\lg\sqrt[3]{3^{5x-7}}=0$

*421. $\lg_5 120+x-3-2\lg_5(1-5^{x-3})=-\lg_5(0{,}2-5^{x-4})$

*422. $15^{\lg_5 3}x^{\lg_5 9x+1}=1$

423. $\lg_4\{2\lg_3[1+\lg_2(1+3\lg_2 x)]\}=\frac{1}{2}$

*424. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$

*425. $x^{\lg x}=100x$

426. $x^{2\lg^3 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10}$

427. $2x^{\lg\frac{2}{3}x}=\sqrt[4]{\frac{32}{3}x}$

*428. $(2x+1)^{\lg(2x+1)-3}=\frac{1}{100}$

*429. $\lg_{a^2}x+\lg_{x^2}a=1$

*430. $\lg_a(ax)\cdot\lg_x(ax)=\lg_{a^2}\frac{1}{a}$, $a>0$ i $a\neq 1$

*431. $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$

*432. $\lg x=\sqrt{-x^2-3x-2}$

433. Dla jakich wartości parametru k równanie

$$\frac{\lg(kx)}{\lg(x+1)}=2$$

ma tylko jeden pierwiastek?

434. Dla jakich wartości m równanie

$$x^2-2x+\lg_{0,5}m=0$$

ma dwa różne pierwiastki?

435. Dla jakiej wartości parametru a równanie

$$x^2-2x+1=2x\lg a+\lg^2 a$$

ma dwa różne pierwiastki?

436. Wykazać, że jeżeli t spełnia równanie

$$2\lg 2+\left(1+\frac{1}{2t}\right)\lg 3-\lg\left(3^{\frac{1}{t}}+27\right)=0$$

to nierówność

$$-3<\frac{x^2+tx-2}{x^2-x+1}<2$$

jest prawdziwa dla każdej wartości x.

Rozwiązać układy równań:

437. $\begin{cases}2\lg x-\lg y=\lg 9\\ 10^{y-x}=\frac{1}{100}\end{cases}$

438. $\begin{cases}x^y=9\\ y=\lg_3 x+1\end{cases}$

439. $\begin{cases}x^{\lg y}=100\\ \lg_y x=2\end{cases}$

440. $\begin{cases}xy=400\\ x^{\lg y}=16\end{cases}$

441. $\begin{cases}xy=a^2\\ 2(\lg^2 x+\lg^2 y)=5\lg^2 a^2, \quad a>0\end{cases}$

442. $\begin{cases}x^2=y^5\\ \lg\frac{x}{y}=\frac{\lg x}{\lg y}\end{cases}$

443. $\begin{cases}2^x=3^y\\ x^2+xy=10\end{cases}$

*444. $\begin{cases}\lg_x y-2\lg x=1\\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=1\end{cases}$

*445. $\begin{cases}(ax)^{\lg a}=(by)^{\lg b}\\ b^{\lg ax}=a^{\lg by}, \quad a,b\neq 1, \quad a\neq b\end{cases}$

446. $\begin{cases}\frac{1}{2}\lg x+\frac{1}{2}\lg y-\lg(4-x)=0\\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}}-125\cdot 5^{\sqrt{y}}=0\end{cases}$

*447. $\begin{cases}\lg_x 10+\lg_y 10=5\\ \lg_{10}x+\lg_{10}y=\frac{5}{4}\end{cases}$

*448. $\begin{cases}\lg_y x+\lg_x y=\frac{5}{2}\\ x+y=a+a^2, \quad a>0\end{cases}$

*449. $\begin{cases}\lg_2 x+\lg_4 y+\lg_4 z=2\\ \lg_3 y+\lg_9 z+\lg_9 x=2\\ \lg_4 z+\lg_{16}x+\lg_{16}y=2\end{cases}$

Rozwiązać nierówności:

450. $\lg^2(x-1)-2\lg(x-1)>0.$

***451.** $\lg_{\frac{1}{2}}x>\lg_{\frac{1}{3}}x.$

452. $\lg_2(x+14)+\lg_2(x+2)\geqslant 6$

***453.** $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}>3$

***454.** $\lg_x 2\cdot\lg_{2x}2>\lg^2_{4x}2$

***455.** $x^{\lg_a x}<a$

456. $\dfrac{1}{\lg_a x}>1$, gdzie $a>1$

457. $|3-\lg_2 x|<1$

458. $3^{\lg_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)}<1$

459. $\lg_{2x+3}x^2<1$

***460.** $\lg_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+1}<1+\lg_{\frac{1}{3}}\sqrt{4-x^2}$

***461.** $\lg\left(3^{\sqrt{\frac{x(x-4)}{x-3}}}+1\right)\leqslant 1$

***462.** Wykazać, że

$$\frac{1}{\lg_2 3}+\frac{1}{\lg_5 3}>2$$

***463.** Wykazać, że

$$|\lg_a b+\lg_b a|\geqslant 2$$

gdzie $a, b>0$ oraz $a, b\neq 1$.

***464.** Wykazać, że jeżeli $a>1$; $m, n>0$ to

$$\frac{\lg_a m+\lg_a n}{2}\leqslant\lg_a\frac{m+n}{2}$$

§ 6. Funkcje trygonometryczne

Sprawdzić tożsamości:

465. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$

466. $\sin 7\alpha\cdot\operatorname{tg}3{,}5\alpha+\cos 7\alpha=1$

467. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

468. $\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 4\alpha\sin\alpha=\cos 3\alpha\cos 2\alpha$

469. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}-\dfrac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

Sprowadzić do postaci iloczynowej wyrażenia:

470. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$

471. $1-\sin\alpha+\cos\alpha$

472. $\sin 87°-\sin 59°-\sin 93°+\sin 61°$

Uprościć wyrażenia:

473. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$

474. $\sin\alpha-\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}$, jeżeli $\pi<\alpha<2\pi$

Obliczyć:

475. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{7}{8}\pi\right)$

476. $\cos\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$

477. $\arccos\left(\sin\dfrac{15}{7}\pi\right)$

478. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{13}\right)$

479. $4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$

***480.** Obliczyć bez pomocy tablic

$$\frac{1-4\sin 10°\sin 70°}{2\sin 10°}$$

Udowodnić równości:

***481.** $\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\dfrac{1}{8}$

****482.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$

***483.** $\sin 47°+\sin 61°-\sin 11°-\sin 25°=\cos 7°$

***484.** Wykazać, że jeżeli α, β, γ są kątami ostrymi i

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2},\quad\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{5},\quad\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{8},\ \text{to}\ \alpha+\beta+\gamma=45°.$$

485. Wykazać, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

486. Wykazać, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, to

$$\sin\beta+\sin\gamma-\cos\alpha=4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$