3. Sprawdzić metodą zero-jedynkową prawdziwość równoważności a) (7.5) b) (7.6), c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$, d) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

4. Czy dwa zdania

$$a)\ x^2 > 1, \text{ oraz } x > 1$$

$$b)\ x^2 < 1, \text{ oraz } x < 1$$

są równoważne dla każdego rzeczywistego x?

5. Czy dwa zdania

a)	$\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,	oraz	$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$
b)	$2 \leqslant 3$,	oraz	$3 \geqslant 2$
c)	$\sin \alpha = 1$,	oraz	$\cos \alpha = 0$
d)	$\sin^2 \alpha = 1$,	oraz	$\cos \alpha = 0$

są równoważne?

8. Forma zdaniowa

Definicja. *Forma zdaniowa (funkcja zdaniowa)* z jedną zmienną, określona w dziedzinie D, jest to takie wyrażenie zawierające tę zmienną, które staje się zdaniem, gdy na miejsce zmiennej podstawimy dowolny element zbioru D.

Na przykład wyrażenie

$$x \text{ jest liczbą pierwszą} \tag{8.1}$$

jest formą zdaniową z jedną zmienną x. Dziedziną tej formy może być np. zbiór liczb naturalnych. Podstawiając do formy zdaniowej (8.1) liczbę 7 na miejsce zmiennej x, dostajemy zdanie prawdziwe, natomiast podstawiając liczbę 8 na miejsce x dostajemy zdanie fałszywe.

Każde równanie jest formą zdaniową. Na przykład równanie

$$x^2 - 1 = 0 \tag{8.2}$$

jest formą zdaniową zmiennej x.

Każda nierówność jest formą zdaniową. Na przykład nierówność

$$z^2 - 4z < 0 \tag{8.3}$$

jest formą zdaniową zmiennej z.

Mówimy, że pewien *element spełnia formę zdaniową*, jeżeli podstawiając go do tej formy na miejsce zmiennej dostajemy zdanie prawdziwe.

Na przykład liczba 11 spełnia formę zdaniową (8.1), natomiast liczba 12 nie spełnia tej formy.

Formę zdaniową nazywamy *tożsamościową*, jeżeli spełnia ją każdy element, natomiast *sprzeczną* – jeżeli nie spełnia jej żaden element (z dziedziny tej formy).

Na przykład równanie $(x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$ oraz nierówność $(x+1)^2 > 2x$ są w dziedzinie liczb rzeczywistych tożsamościowe, zaś równanie $x^2 + 1 = 0$, oraz nierówność $x^2 + 1 < 0$ są sprzeczne.

Dwie formy zdaniowe mające wspólną dziedzinę nazywamy *równoważnymi*, gdy każdy element, który spełnia pierwszą z nich spełnia także drugą i na odwrót.

Na przykład nierówności

$$-x^2 + 4x < 0, \quad \text{oraz} \quad x^2 - 4x > 0$$

są równoważne, gdyż spełnia je każda taka i tylko taka liczba, która jest ujemna lub większa od 4.

Jeżeli forma zdaniowa $p(x)$ jest równoważna formie zdaniowej $q(x)$, to piszemy

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

Na przykład

$$-x^2 + 4x < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0$$

Za pomocą spójników zdaniotwórczych ($\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) można budować formy zdaniowe *złożone*, np.

$$\sim (x^2 - 1 = 0), \quad x < 1 \vee x > 3$$

Rozpatruje się także formy zdaniowe z dwoma lub większą liczbą zmiennych. Na przykład

$$x + y = 3, \quad x + y < 2, \quad x^2 + y - z^3 > 2t, \quad \text{itp.}$$

Pytania i zadania

1. Co to jest forma zdaniowa z jedną zmienną? Podać przykłady i określić w każdym z nich dziedzinę.
2. Co to znaczy: element *spełnia* formę zdaniową?
3. Znaleźć taką wartość x, dla której forma zdaniowa a) $x^2 > 5 \wedge x < -2$, b) $x > 2x \vee x > 10$, c) $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$, d) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^3 = 27$ jest prawdziwa, a następnie taką, dla której ta forma jest fałszywa.
4. Co to znaczy, że forma zdaniowa jest a) tożsamościowa, b) sprzeczna? Podać przykłady.
5. Kiedy dwie formy zdaniowe są równoważne? Podać przykłady.

9. Kwantyfikatory

Spośród licznych zwrotów jakimi posługujemy się w matematyce przy formułowaniu zdań orzekających, na szczególną uwagę zasługują dwa:

$$\text{dla każdego } x \ldots \tag{9.1}$$

oraz

$$\text{istnieje takie } x, \text{ że} \ldots \tag{9.2}$$

Te dwa zwroty nazywamy *kwantyfikatorami;* zwrot (9.1) jest to tzw. *kwantyfikator ogólny* (albo duży), który oznaczamy symbolem

$$\bigwedge_x$$

natomiast zwrot (9.2) jest to tzw. *kwantyfikator szczegółowy* (albo mały), któ[ry] oznaczamy symbolem

$$\bigvee_x$$

Jeżeli formę zdaniową z jedną zmienną poprzedzimy kwantyfikatorem odnoszący[m] się do tej zmiennej, to otrzymamy *zdanie* (prawdziwe albo fałszywe).

Na przykład zdanie

$$\bigwedge_x x^2-1=0$$

jest fałszywe, natomiast zdanie

$$\bigvee_x x^2-1=0$$

jest prawdziwe (w obu przypadkach zakładamy milcząco, że funkcja zdaniowa $x^2-1=0$ rozpatrywana w dziedzinie, do której należą -1 lub 1).

Kwantyfikatory ułatwiają ścisłe, jednoznaczne wypowiadanie zdań. Na przykład zdanie

w trójkącie prostokątnym kwadrat długości jednego boku równa się sumie kwadratów długości dwóch boków pozostałych

jest takim sformułowaniem twierdzenia Pitagorasa, które może budzić różne wątpliwości, np.: czy w każdym trójkącie prostokątnym? Czy kwadrat długości każdego boku równa się...? Można jednak uniknąć tych wątpliwości, korzystając z kwantyfikatorów:

w k a ż d y m trójkącie prostokątnym i s t n i e j e taki bok, którego kwadrat długości równa się sumie kwadratów długości dwóch boków pozostałych.

Wiemy, że bok o którego istnieniu mówi to zdanie jest przeciwprostokątną, natomiast dwa pozostałe boki — to przyprostokątne. Dlatego twierdzenie Pitagorasa wypowiadamy zazwyczaj tak:

w k a ż d y m trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

W wielu przypadkach pomijamy w wypowiedzi lub w zapisie kwantyfikator ogólny mając na względzie prostotę sformułowania.

Na przykład zamiast

$$\bigwedge_a \bigwedge_b (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

(czytamy tu: *dla każdego a i dla każdego b* ...) piszemy krótko

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Zaprzeczenie zdania z kwantyfikatorem. Niech $p(x)$ oznacza formę zdaniow[ą] zmiennej x. Zdania:

$$\sim \bigwedge_x p(x) \qquad (9.[3])$$

oraz

$$\bigvee_x \sim p(x) \qquad (9.4)$$

mają tę samą wartość logiczną. Prawdziwa jest zatem równoważność

$$\sim \bigwedge_x \boldsymbol{p(x)} \Leftrightarrow \bigvee_x \sim \boldsymbol{p(x)} \qquad (9.5)$$

która przedstawia sposób zaprzeczania kwantyfikatora ogólnego.

Z a p r z e c z e n i e m zdania $\bigwedge_x p(x)$ jest zdanie $\bigvee_x \sim p(x)$.

Na przykład chcąc udowodnić, że zdanie

$$\bigwedge_x x^2-1=0$$

jest fałszywe, wystarczy udowodnić prawdziwość zdania

$$\sim \bigwedge_x x^2-1=0$$

a więc zdania

$$\bigvee_x \sim (x^2-1=0) \quad \text{czyli} \quad \bigvee_x x^2-1 \neq 0$$

Prawdziwość tego ostatniego zdania łatwo stwierdzić przyjmując np. $x=0$.

Zauważmy następnie, że zdania:

$$\sim \bigvee_x p(x)$$

oraz

$$\bigwedge_x \sim p(x)$$

mają tę samą wartość logiczną. Prawdziwa jest zatem równoważność

$$\sim \bigvee_x \boldsymbol{p(x)} \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim \boldsymbol{p(x)} \qquad (9.6)$$

która przedstawia sposób zaprzeczania kwantyfikatora szczegółowego.

Z a p r z e c z e n i e m zdania $\bigvee_x p(x)$ jest zdanie $\bigwedge_x \sim p(x)$.

Pytania i zadania

1. Co to jest a) kwantyfikator ogólny, b) kwantyfikator szczegółowy? Podać przykłady zdań z kwantyfikatorami.
2. Omówić zaprzeczenie zdania z kwantyfikatorem a) ogólnym, b) szczegółowym.
3. Które z następujących zdań są prawdziwe, a które są fałszywe

a) $\bigwedge_\alpha \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, b) $\bigwedge_\alpha \sin 2\alpha = 2\sin\alpha$,

c) $\bigvee_\alpha \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, d) $\bigvee_\alpha \sin 2\alpha = 2\sin\alpha$,

e) $\sim \bigwedge_x \sqrt{x^2} = x$, f) $\sim \bigvee_x \sqrt{x^2} = x$,

g) $\sim \bigwedge_x \sqrt[3]{x^3} = x$, h) $\sim \bigvee_x \sqrt[3]{x^3} = x$.

dobnie mówimy, że funkcja zdaniowa $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ jest *fałszywa* w $X_1, \dots, X_n$, jeśli dla każdego $a_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ jest zdaniem fałszywym.

Niech $\Phi(x)$ będzie funkcją zdaniową o zakresie zmienności X, zaś zbiór Z będzie wykresem funkcji Φ. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by (zad. 3.21-3.22):

3.21. $Z = X$. **3.22.** $Z = O$.

3.23. Załóżmy, że wykresy Z_1 — funkcji zdaniowej $\Phi_1(x)$ i Z_2 — funkcji zdaniowej $\Phi_2(x)$ są równe; jaki jest wykres funkcji zdaniowej:

a) $\Phi_1(x) \Leftrightarrow \Phi_2(x)$, b) $\Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$, c) $\Phi_1(x) \vee \sim \Phi_2(x)$.

3.24. Niech $\Phi_1(x)$ będzie funkcją zdaniową prawdziwą w X, zaś $\Phi_2(x)$ dowolną funkcją zdaniową. Jaki jest wykres funkcji zdaniowej:

a) $\Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$, b) $\Phi_1(x) \vee \Phi_2(x)$,
c) $\sim \Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$, d) $\sim \Phi_1(x) \vee \Phi_2(x)$.

Znaleźć wykresy funkcji zdaniowych $\Phi(x, y)$, gdzie zakresem zmienności zmiennej x i zakresem zmienności zmiennej y jest zbiór $\mathscr{R}$ (zad. 3.25-3.55):

3.25. $x = y$. **3.26.** $x < y$.
3.27. $x \leqslant y$. **3.28.** $x \geqslant y$.
3.29. $x^2+y^2 \leqslant 1$. **3.30.** $x^2+y^2 = 1$.
3.31. $ax+by+c = 0$ $(a, b, c \in \mathscr{R})$. **3.32.** $x \neq y$.
3.33. $x^2+y^2 = 0$. **3.34.** $x \cdot y = 1$.
3.35. $x \cdot y = 0$. **3.36.** $x \cdot y < 1$.
3.37. $ax^2+bx+c+y = 0 (a,b,c \in \mathscr{R})$. **3.38.** $x < |y|$.
3.39. $|x| > y$. **3.40.** $(ax)^2+(by)^2 \leqslant 1 (a,b,c \in \mathscr{R})$.
3.41. $x^2+y^2 \geqslant 0$. **3.42.** $|x \cdot y| < 0$.
3.43. $x \geqslant y \vee x^2+y^2 \leqslant 1$. **3.44.** $x+y = 0 \vee x \geqslant y$.
3.45. $x+y = 1 \vee x \neq y$. **3.46.** $x \geqslant y \wedge x^2+y^2 = 0$.
3.47. $x \cdot y < 1 \Rightarrow x \cdot y = 1$. **3.48.** $\sim(x \cdot y < 1)$.
3.49. $|x \cdot y| < 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 0$. **3.50.** $x \geqslant 0 \vee y \geqslant 0$.
3.51. $x < |y| \Rightarrow x^2+y^2 \geqslant 0$. **3.52.** $x \leqslant 0 \vee (y = y)$.
3.53. $x^2+y^2 = 0 \vee x = x$. **3.54.** $y^2+2y-3 \leqslant 0$.
3.55. $x^3+1 > 0$.

Znaleźć wykresy funkcji zdaniowych zmiennych x, y i z, których zakresem zmienności jest zbiór $\mathscr{R}$ (zad. 3.56-3.62):

3.56. $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. **3.57.** $x+y = z$.
3.58. $x+y = 1$. **3.59.** $x^2+y^2 \leqslant 1$.

3.60. $x^2+y^2 < 4 \wedge |z| < 1$. **3.61.** $|x| < 1 \wedge |y| < 1 \wedge |z| < 1$.
3.62. $x^2+y^2 = z^2$.

O układzie $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ mówimy, że spełnia funkcję zdaniową $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ jeśli $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ jest zdaniem prawdziwym. Jeśli istnieją takie $a_1, \dots, a_n$, że $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ spełnia $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, to funkcję $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ nazywamy *funkcją spełnialną*.

3.63. Dowieść, że wykres funkcji zdaniowej Φ jest zbiorem pustym wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja Φ nie jest spełnialna.

3.64. Dowieść, że funkcja Φ nie jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja Φ jest fałszywa.

3.65. Dowieść, że jeśli $X_1, \dots, X_n$ są zakresami zmienności funkcji $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ i $X_i \neq 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to jeśli funkcja Φ jest prawdziwa, to jest ona spełnialna.

3.66. Dowieść, że funkcja $\Theta(x, y) = \Phi(x) \vee \Psi(y)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy albo funkcja $\Phi(x)$, albo funkcja $\Psi(y)$ jest spełnialna.

3.67. Dowieść, że funkcja $\Theta(x, y) = \Phi(x) \wedge \Psi(y)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje $\Phi(x)$ i $\Psi(y)$ są spełnialne.

Czy takie samo twierdzenie jest prawdziwe i dla funkcji $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$?

3.68. Dowieść, że funkcja $\Theta(x, y) = \Phi(x) \Rightarrow \Psi(y)$ nie jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi(x)$ jest prawdziwa, a $\Psi(y)$ fałszywa.

Czy takie samo twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji $\Phi(x)$ i $\Psi(y)$?

3.69. Kiedy spełnialna jest funkcja $\sim \Phi(x)$?

3.70. Dowieść, że jeśli X jest zakresem zmienności zmiennej x, to wykres funkcji $\sim \Phi(x)$ jest różny od X wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\Phi(x)$ jest spełnialna.

3.71. Dowieść, że jeśli $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ i $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ są takimi funkcjami, że dla wszelkich $a_1, \dots, a_n$ z zakresu zmienności zmiennych $\Phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \Psi(a_1, \dots, a_n)$, to wykresy funkcji Φ i Ψ są identyczne.

3.72. Dowieść twierdzenia odwrotnego do podanego w zadaniu 3.71.

Zakładając, że $\Phi(x, y, z)$, $\Psi(x, y, z)$, $\Theta(x, y, z)$ są funkcjami zdaniowymi o zmiennych x, y, z, wskazać zmienne wolne i zmienne związane w następujących formułach (zad. 3.73-3.85):

3.73. $\bigwedge_{x} \Phi(x, y, z)$. **3.74.** $\bigwedge_{x}\bigwedge_{y} \Phi(x, y, z)$.
3.75. $\bigvee_{z} \Phi(x, y, z)$. **3.76.** $\bigvee_{x} \Phi(x, y, z)$.
3.77. $[\bigvee_{x}\bigwedge_{y} \Phi(x, y, z)] \Rightarrow \Psi(x, y, z)$.

3.78. $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y, z) \wedge \bigvee_z \Psi(x, y, z)$.

3.79. $\bigwedge_x \Phi(x, y, z) \Rightarrow \{\bigvee_x (\bigvee_y \Psi(x, y, z) \wedge \bigwedge_z \Theta(x, y, z))\}$.

3.80. $\bigvee_x [\Phi(x, y, z) \Rightarrow \Psi(x, x, y)] \Rightarrow \{\bigvee_x \bigvee_z [\Phi(x, x, y) \wedge \Theta(x, y, y)]\}$.

3.81. $\bigvee_x (x < y \vee x < z)$.

3.82. $\bigvee_x \bigwedge_y [(x < y) \Rightarrow (x < z) \wedge (z < y)]$.

3.83. $\bigwedge_x (x|y \wedge x|z \Rightarrow x|z)$.

3.84. $(\bigwedge_x \bigvee_y x < y) \vee (x < z)$.

3.85. $\bigvee_x (x < x \vee x < z)$.

3.86. Niech $\Phi(x)$ będzie funkcją zdaniową określoną na zbiorze $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dowieść, że

a) $\bigwedge_x \Phi(x) \Leftrightarrow (\Phi(a_1) \wedge \Phi(a_2) \wedge \ldots \wedge \Phi(a_n))$,

b) $\bigvee_x \Phi(x) \Leftrightarrow (\Phi(a_1) \vee \Phi(a_2) \vee \ldots \vee \Phi(a_n))$.

3.87. Niech $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi na zbiorze $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dowieść, że

a) $\bigwedge_{\Psi(x)} \Phi(x) \Leftrightarrow \{[\Psi(a_1) \Rightarrow \Phi(a_1)] \wedge [\Psi(a_2) \Rightarrow \Phi(a_2)] \wedge \ldots \wedge [\Psi(a_n) \Rightarrow \Phi(a_n)]\}$,

b) $\bigvee_{\Psi(x)} \Phi(x) \Leftrightarrow \{[\Psi(a_1) \wedge \Phi(a_1)] \vee [\Psi(a_2) \wedge \Phi(a_2)] \vee \ldots \vee [\Psi(a_n) \wedge \Phi(a_n)]\}$.

Zakładając, że x, y i z przebiegają zbiór $\mathscr{R}$, znaleźć wykresy następujących funkcji zdaniowych (zad. 3.88-3.111):

3.88. $\bigvee_x x^2+y^2 = 1$.

3.89. $\bigvee_x x \cdot y = 1$.

3.90. $\bigwedge_x x^2+y^2 = 1$.

3.91. $\bigvee_x x \cdot y = 1$.

3.92. $\bigvee_x x \cdot y \neq 1$.

3.93. $\bigwedge_x x \cdot y < 1$.

3.94. $\bigvee_x x \cdot y < 1$.

3.95. $\bigwedge_x x^2+1 < y$.

3.96. $\bigvee_x x^2+y^2 = z^2$.

3.97. $\bigwedge_x x^2+y^2 \neq z^2$.

3.98. $\bigwedge_x \bigvee_y x^2+y^2 = z^2$.

3.99. $\bigvee_x \bigwedge_y x \cdot y = z$.

3.100. $\bigwedge_x \bigvee_y (x < z) \wedge (z < y)$.

3.101. $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2+y^2 \geqslant z$.

3.102. $\bigvee_x (x^2+y^2 = 1) \vee (x < x)$.

3.103. $\bigvee_x (x \cdot y = 1) \wedge (x = x)$.

3.104. $\bigvee_x \sqrt{1-x^2} = y$.

3.105. $\bigwedge_x \sqrt{1-x^2} = y$.

3.106. $\bigvee_x (x^2+2ax+b = y) \wedge (y > 0)$.

3.107. $\bigwedge_x \sin y < x \wedge x < 2+ \sin y$.

3.108. $\bigvee_x \sin y < x \wedge x < 2+ \sin y$.

3.109. $\bigvee_x \operatorname{tg} x > y \wedge -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$.

3.110. $\bigwedge_x \operatorname{tg} x > y \wedge -\frac{1}{2}\pi < x \wedge x < \frac{1}{2}\pi$.

3.111. $\bigvee_z x = z \cdot \sin z \wedge y = z \cdot \cos z$.

3.112. Niech $\Phi(x, y)$ będzie funkcją zdaniową określoną dla liczb rzeczywistych. Jaki jest sens geometryczny operacji prowadzących od wykresu funkcji $\Phi(x, y)$ do wykresów następujących funkcji:

a) $\bigwedge_x \Phi)(x, y)$, b) $\bigvee_x \Phi(x, y)$, c) $\bigwedge_y \Phi(x, y)$, d) $\bigvee_y \Phi(x, y)$.

3.113. Dowieść, że dla dowolnej funkcji zdaniowej $\Phi(x, y)$, jeśli którykolwiek z wykresów funkcji $\bigvee_x \Phi(x, y)$, $\bigvee_y \Phi(x, y)$ nie jest zbiorem pustym, to $\Phi(x, y)$ jest spełnialna.

Niech $x = y$, $x < y$, $x \leqslant y$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi dla liczb naturalnych. Za ich pomocą, korzystając ze znanych operacji arytmetycznych, takich jak $x+y$, $x \cdot y$, symboli dla liczb oraz symboli logicznych, zapisać następujące funkcje zdaniowe (zad. 3.114-3.128):

3.114. x jest liczbą parzystą.

3.115. x jest sumą kwadratów dwu liczb naturalnych.

3.116. x jest liczbą pierwszą.

3.117. x nie jest liczbą pierwszą.

3.118. x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb y i z.

3.119. x jest największym wspólnym dzielnikiem liczb y i z.

3.120. x przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1 lub 2.

3.121. Każda liczba przy dzieleniu przez 2 daje resztę 0 lub 1.

3.122. Pomiędzy liczbami n i $2n$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza (tw. Czebyszewa).

3.123. Liczby x i y mają takie same dzielniki.

3.124. Każda liczba nieparzysta większa od 3 rozkłada się na sumę dwu liczb pierwszych (hipoteza Goldbacha).

3.125. Każde trzy liczby mają najmniejszą wspólną wielokrotność.

3.126. Każde dwie liczby mają największy wspólny dzielnik.

3.127. Nie istnieje największa liczba naturalna.

3.128. Nie istnieje największa liczba pierwsza.

W odróżnieniu od założeń czynionych poprzednio przyjmijmy teraz, że zmienne w funkcjach zdaniowych $x = y$, $x < y$ i $x \leqslant y$ przebiegają zbiór liczb rzeczywistych. Korzystając z tych funkcji oraz ze znanych operacji arytmetycznych, takich jak $x+y$, x^y, $x \cdot y$, $|x|$ itp. zapisać za pomocą symboli logicznych następujące formuły (zad. 3.129-3.135):

3.129. Nie istnieje liczba, której kwadrat byłby mniejszy od zera.

3.130. Funkcja $f(x)$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

3.131. Między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia.

3.132. Nie istnieje największa liczba rzeczywista.

3.133. x nie jest kwadratem żadnej liczby rzeczywistej.

3.134. y jest pierwiastkiem stopnia co najwyżej trzeciego z pewnej liczby rzeczywistej.

3. 135. $f(x)$ jest funkcją malejącą.

Przy założeniach czynionych uprzednio, mając dodatkowo funkcję zdaniową $n \in \mathcal{N}$ (n jest liczbą naturalną) zapisać za pomocą symboli logicznych następujące formuły (funkcje zdaniowe) (zad. 3.136-3.150):

3.136. Ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący.

3.137. Ciąg $\{a_n\}$ przyjmuje wartości dodatnie.

3.138. Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny.

3.139. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.

3.140. Ciąg $\{a_n\}$ jest od pewnego miejsca stały.

3.141. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest od pewnego miejsca stały, to jest zbieżny.

3.142. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, to zawiera podciąg zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej.

3.143. Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0.

3.144. Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, to jest ograniczona.

3.145. Funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle a, b\rangle$ jednostajnie ciągła.

3.146. a jest kresem górnym liczb ze zbioru $\mathcal{R}$.

3.147. a jest kresem dolnym liczb ze zbioru $\mathcal{R}$.

3.148. Jeśli $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$, to osiąga w tym przedziale kresy.

3.149. Jeśli $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami ciągłymi, to i funkcja $f(x)\,g(x)$ też jest funkcją ciągłą.

3.150. Jeśli $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami jednostajnie ciągłymi, to funkcja $f(x)+g(x)$ też jest jednostajnie ciągła.

Udowodnić, że następujące wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów (zad. 3.151-3.159):

3.151. $\sim \bigvee_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim\Phi(x)$ (*prawo de Morgana*).

3.152. $\sim \bigwedge_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim\Phi(x)$ (*prawo de Morgana*).

3.153. $\bigvee_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x \Phi(x, y)$.

3.154. $\bigvee_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Leftrightarrow \bigvee_x \Phi(x) \vee \bigvee_x \Psi(x)$.

3.155. $\bigvee_x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)] \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x) \wedge \bigvee_x \Psi(x)$.

3.156. $\bigwedge_x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)] \Leftrightarrow \bigwedge_x \Phi(x) \wedge \bigwedge_x \Psi(x)$.

3.157. $\bigwedge_x \Phi(x) \vee \bigwedge_x \Psi(x) \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)]$.

3.158. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Psi(x)]$.

3.159. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigwedge_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \Psi(x)]$.

Zakładając, że funkcja zdaniowa Ψ nie zawiera x jako zmiennej wolnej dowieść, że następujące wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów (zad. 3.160-3.166):

3.160. $(\bigwedge_x \Psi) \Leftrightarrow \Psi$.

3.161. $\bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi] \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x) \vee \Psi$.

3.162. $\Psi \wedge \bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x [\Psi \wedge \Phi(x)]$.

3.163. $[\Psi \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x [\Psi \Rightarrow \Phi(x)]$.

3.164. $[\Psi \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x)] \Rightarrow \bigvee_x [\Psi \Rightarrow \Phi(x)]$.

3.165. $[\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \Psi] \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi]$.

3.166. $[\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \Psi] \Rightarrow \bigvee_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi]$.

Sprawdzić, czy następujące formuły są tautologiami (zad. 3.167-3.177):

3.167. $\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_z \Phi(z)$.

3.168. $\bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x) \vee \bigwedge_x \Psi(x)$.

3.169. $\bigwedge_y \bigvee_x \Phi(x, y) \Rightarrow \bigvee_x \bigwedge_y \Phi(x,y)$.

3.170. $\bigvee_x \Phi(x) \wedge \bigvee_x \Psi(x) \Rightarrow \bigvee_x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]$.

3.171. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \Psi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)]$.

3.172. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Psi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)]$.

3.173. $\bigvee_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Psi(x)]$.

3.174. $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x, x)$.

3.175. $\bigvee_x \bigvee_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x, x)$.

3.176. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x)]$.

3.177. $\bigwedge_x [\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)]$.

Niech Ax_L oznacza zbiór zdań postaci:

a) $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Psi(x)]$,

b) $\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)$,

c) $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x \Phi(x, y)$,

d) $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x, x)$ o ile Φ nie zawiera żadnego kwantyfikatora, który wiąże zmienną x i w którego zasięgu jest zmienna wolna y,

e) $\Phi \Rightarrow \bigwedge_x \Phi$ o ile Φ nie zawiera zmiennej wolnej x,

f) $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Psi(x)]$,

g) $\Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x)$,

h) $\bigvee_x \bigvee_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigvee_y \bigvee_x \Phi(x, y)$,

i) $\bigvee_x \Phi(x, x) \Rightarrow \bigvee_x \bigvee_y \Phi(x, y)$ o ile Φ nie zawiera żadnego kwantyfikatora, który wiąże zmienną x i w którego zasięgu znajdowałaby się zmienna wolna y,

j) $\bigvee_x \Phi \Rightarrow \Phi$ o ile Φ nie zawiera zmiennej wolnej x,

oraz wszystkie zdania, które można uzyskać z tautologii rachunku zdań przez podstawienie za zmienne zdaniowe dowolnych wyrażeń i poprzedzenie ich kwantyfikatorami dużymi wiążącymi wszystkie zmienne wolne.

Tak określony zbiór Ax_L jest systemem aksjomatów dla rachunku kwantyfikatorów.

3.178. Stosując taką metodę jak w zadaniach 3.151-3.166 dowieść, że formuły b-j są tautologiami rachunku kwantyfikatorów.

3.179. Stosując reguły wnioskowania (patrz rozdz. I) wyprowadzić z Ax_L formuły z zadań 3.151-3.166.

3.180. Dowieść, że nie jest konsekwencją Ax_L następujące zdanie:

$$\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x).$$

3.181. Dowieść, że uzupełniając zbiór Ax_L jeszcze jednym zdaniem typu

$$\bigvee_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(x)],$$

z tak wzbogaconego zbioru możemy udowodnić zdanie

$$\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x).$$

Uwaga. Zbiór Ax_L z dodanym zdaniem $\bigvee_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(x)]$ nazywamy *aksjomatyką rachunku kwantyfikatorów* w dziedzinie niepustej.

***3.182.** Dowieść, że jeśli w formule Φ będącej twierdzeniem rachunku kwantyfikatorów (tautologią) zastąpimy wszystkie kwantyfikatory przez kwantyfikatory ograniczone do pewnej funkcji zdaniowej $\Psi(x)$, to otrzymamy znów tautologię.

Przeprowadzić dowody poniższych twierdzeń, wskazać z jakich reguł wnioskowania i jakich tautologii rachunku kwantyfikatorów korzysta się w kolejnych krokach dowodowych (zad. 3.183-3.189):

3.183. Każda liczba naturalna ma przynajmniej jeden dzielnik, który jest liczbą pierwszą.

3.184. Między dowolnymi dwoma liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia, różna od nich.

3.185. Nie istnieje największa liczba rzeczywista.

3.186. Każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła.

3.187. Dla każdych dwóch liczb istnieje wspólna wielokrotność.

3.188. Dla dowolnego b i $a \neq 0$ równanie $ax+b = 0$ ma rozwiązanie.

3.189. W każdym trójkącie istnieje punkt równoodległy od wszystkich boków.

Formuła Φ jest formułą *elementarną* (*atomową*), jeżeli nie jest postaci $\Phi_1 \cdot \Phi_2$, gdzie $\cdot$ oznacza jeden ze spójników logicznych, ani też postaci