

12. WYKŁADY 12 I 13: RACHUNEK λ . RACHUNEK KOMBINATORÓW, TYPY PROSTE I IZOMORFIZM CURRY-HOWARDA.

Zdefiniujemy teraz system CL (beztypowego) **rachunku kombinatorów**, zwany także **logiką kombinatoryczną**, chociaż ta druga nazwa jest nieco myląca. Zbiór termów $\mathcal{C}$ definiujemy jako na jmniejszy zbiór o następujących własnościach:

- **Zmienne przedmiotowe** należą do $\mathcal{C}$,
- Stałe K i S należą do $\mathcal{C}$,
- Jeśli $F, G \in \mathcal{C}$, to $(FG) \in \mathcal{C}$.

Konwencje nawiasowe są takie same jak dla termów rachunku λ . **Podstawienie** w CL definiujemy podobnie jak dla rachunku λ , ale łatwiej, bo nie ma zmiennych związanych.

- $x[x := F] = F$ oraz $y[x := F] = y$ dla $y \neq x$,
- $K[x := F] = K$ oraz $S[x := F] = S$,
- $GH[x := F] = G[x := F]H[x := F]$.

Relację **słabej redukcji** w zbiorze $\mathcal{C}$ definiujemy jako najmniejszą relację $\rightarrow_w$ o własnościach:

- $KAB \rightarrow_w A$ dla dowolnych A, B ,
- $SABC \rightarrow_w AC(BC)$ dla dowolnych A, B, C ,
- Jeśli $A \rightarrow_w B$, to $AC \rightarrow_w BC$ oraz $CA \rightarrow_w CB$, dla dowolnych A, B, C .

Jak zwykle, symbol $\rightarrow_w$ oznacza domknięcie przechodnio-zwrotne relacji $\rightarrow_w$, a $=_w$ (słaba równość), to najmniejsza relacja równoważności zawierająca $\rightarrow_w$. Termy rachunku kombinatorów nazywamy oczywiście **kombinatorami**. Zamknięte termy rachunku lambda przejęły tę nazwę od swoich odpowiedników w $\mathcal{C}$.

Oto kilka ważnych kombinatorów i związane z nimi redukcje:

- Niech $I = SKK$. Wtedy $IF \rightarrow_w KF(KF) \rightarrow_w F$ dla dowolnego F .
- Term $\Omega = SII(SII)$ redukuje się sam do siebie.
- Niech $W = SS(KI)$. Wtedy $WFG \rightarrow_w FGG$ dla dowolnych F, G .
- Niech $B = S(KS)K$. Wtedy $BFGH \rightarrow_w F(GH)$, dla dowolnych F, G, H .
- Niech $C = S(BBS)(KK)$. Wtedy $CFGH \rightarrow_w FHG$ dla dowolnych F, G, H .
- Niech $B' = CB$. Wtedy $B'FGH \rightarrow_w G(FH)$.
- Niech $2 = SB(SB(KI))$. Wtedy $2FG \rightarrow_w F(FG)$.

System CL , jako system redukcyjny, ma własności podobne do rachunku λ . Na przykład prawdziwe jest twierdzenie Churcha-Rossera, a takie własności jak normalizacja, silna normalizacja, czy równość, są nierozstrzygalne. System CL ma bowiem podobną siłę wyrazu – można w nim na przykład zdefiniować liczebniki i reprezentować funkcje częściowo rekurencyjne. W istocie, logika kombinatoryczna została wynaleziona przez Curry'ego i Schönfinkela niezależnie od rachunku lambda i mniej więcej w tym samym czasie, ale w gruncie rzeczy w podobnym celu.

Podobieństwo pomiędzy CL i rachunkiem λ można wyrazić definiując translację

$$(\)_{\Lambda} : \mathcal{C} \rightarrow \Lambda \text{ oraz } (\)_{\mathcal{C}} : \Lambda \rightarrow \mathcal{C}.$$

Pierwsza z nich jest łatwa:

- $(x)_{\Lambda} = x$ dla $x \in V$,
- $(K)_{\Lambda} = \lambda xy.x$,
- $(S)_{\Lambda} = \lambda xyz.xz(yz)$,
- $(FG)_{\Lambda} = (F)_{\Lambda}(G)_{\Lambda}$.

Następujący łatwy fakt wyraża poprawność tej translacji ze względu na redukcje.

Stwierdzenie 1. (1) *Jeśli $F \rightarrow_w G$, to $(F)_\Lambda \rightarrow_\beta (G)_\Lambda$.*
 (2) *Jeśli $F =_w G$, to $(F)_\Lambda =_\beta (G)_\Lambda$.*

Stwierdzenie to można odczytać tak: translację $()_\Lambda$ można uważać za przekształcenie z $\mathcal{C}/=_w$ do $\Lambda/=_\beta$, czyli za morfizm z teorii równościowej CL do teorii równościowej Λ . Dowód wynika wprost z definicji.

Aby określić translację $()_\mathcal{C} : \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ musimy przede wszystkim zdefiniować w CL konstrukcję (zwaną **kombinatoryczną abstrakcją**), która zachowuje się tak jak abstrakcja. Można to zrobić na kilka sposobów, na przykład tak:

- $\lambda^*x.F = KF$, gdy $x \notin F_V(F)$,
- $\lambda^*x.x = I$,
- $\lambda^*x.FG = S(\lambda^*x.F)(\lambda^*x.G)$, w przeciwnym przypadku.

Stwierdzenie 2. $(\lambda^*x.F)G \rightarrow_w F[x := G]$.

Dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Wniosek 1 (kombinatoryczna zupełność). *Dla dowolnych x i F istnieje takie H , że dla dowolnego G zachodzi $HG \rightarrow_w F[x := G]$.*

Teraz możemy zdefiniować translację $()_\mathcal{C} : \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$:

- $(x)_\mathcal{C} = x$ dla $x \in V$,
- $(MN)_\mathcal{C} = (M)_\mathcal{C}(N)_\mathcal{C}$,
- $(\lambda x.M)_\mathcal{C} = \lambda^*x.(M)_\mathcal{C}$.

Stwierdzenie 3. *Dla dowolnego $M \in \Lambda$ zachodzi $((M)_\mathcal{C})_\Lambda =_\beta M$.*

Dowód. Najpierw należy pokazać $(\lambda^*x.M)_\Lambda =_\beta \lambda x(M)_\Lambda$, przez indukcję ze względu na M . Następnie jeszcze raz stosujemy indukcję ze względu na M . $\square$

A zatem translacja $()_\Lambda$ wyznacza przekształcenie “na” z ilorazu $\mathcal{C}/=_w$ do $\Lambda/=_\beta$. Poniższy wniosek stwierdza, że termy K i S stanowią **bazę** dla rachunku λ .

Wniosek 2. *Każdy zamknięty λ -term można otrzymać (z dokładnością do $=_\beta$) z termów K i S przez stosowanie aplikacji.*

Dowód wynika wprost z poprzedniego stwierdzenia.

Niestety, operacja $()_\mathcal{C}$ nie ma tak dobrych własności jak translacja $()_\Lambda$. Nie można jej uważać za morfizm teorii równościowych.

Stwierdzenie 4. *Złożenie $((\cdot)_\Lambda)_\mathcal{C}$ nie jest identycznością. Na przykład $((K)_\Lambda)_\mathcal{C} = S(KK)I \neq_w K$.*

- (1) *Z równości $M =_\beta N$ nie wynika $(M)_\mathcal{C} =_w (N)_\mathcal{C}$. Na przykład $\lambda x.KIx \rightarrow_\beta \lambda x.I$, ale $(\lambda x.KIx)_\mathcal{C} = S(K(S(KK)II))I =_w S(K(KI))I \neq_w KI = (\lambda x.I)_\mathcal{C}$.*

A zatem ”słaba” równość jest w istocie silniejsza niż $=_\beta$. Przyczyną tego jest to, że kombinatoryczna abstrakcja λ^* nie spełnia warunku słabej ekstensjonalności ze względu na $=_w$:

$$\frac{M = N}{\lambda x.M = \lambda x.N}.$$

W istocie

$$\lambda^*x.KIx = S(K(KI))I \neq_w KI = \lambda^*x.I,$$

choć $KIx \rightarrow_w I$.

Można to poprawić kosztem wprowadzenia ekstensjonalności. Niech $=_{ext}$ będzie najmniejszą relacją równoważności w $\mathcal{C}$, taką że:

- Jeśli $G =_w H$, to $G =_{ext} H$,
- Jeśli $Gx =_{ext} Hx$ i $x \notin F_V(G) \cup F_V(H)$, to $G =_{ext} H$,
- Jeśli $G =_{ext} G'$, to $GH =_{ext} G'H$ i $HG =_{ext} HG'$.

Stwierdzenie 5. (1) Dla dowolnych $G, H \in \mathcal{C}$, warunki $G =_{ext} H$ i $(G)_\Lambda =_{\beta_\eta} (H)_\Lambda$ są równoważne.
 (2) Dla dowolnych $M, N \in \Lambda$, warunki $M =_{\beta_\eta} N$ i $(M)_\mathcal{C} =_{ext} (N)_\mathcal{C}$ są równoważne.
 (3) Równanie $((G)_\Lambda)_\mathcal{C} =_{ext} G$ zachodzi dla dowolnego $G \in \mathcal{C}$.

Omówimy teraz pokrótce pojęcie **typu**. Przyjmijmy, że mamy pewien niepusty zbiór **typów atomowych**, który oznaczmy przez TV . Typy atomowe nazywamy też **zmiennymi typowymi**. Typy definiujemy indukcyjnie:

- Typy atomowe $p, q, r, \dots$ są typami,
- Jeśli σ i τ są typami, to $\sigma \rightarrow \tau$ jest typem.

Zbiór wszystkich typów oznaczmy przez T . Stosujemy taką konwencję, że strzałka jest łączna w prawo, tj. napis $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho$ oznacza $\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \rho)$. Zauważmy, że każdy typ można zapisać jako $\sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n \rightarrow p$, gdzie p jest typem atomowym.

Otoczenie typowe to częściowa funkcja ze zbioru zmiennych przedmiotowych w zbiór typów. Taką funkcję utożsamiamy ze zbiorem par postaci $(x : \tau)$ gdzie x jest zmienną przedmiotową a τ jest typem.

Napis $\Gamma(x : \tau)$ oznacza to samo co $\Gamma[x \mapsto \tau]$, a więc $\Gamma(x : \tau)$ powstaje z Γ przez dodanie deklaracji $x : \tau$ poprzedzone usunięciem deklaracji $(x : \Gamma(x))$, jeśli była w Γ . Zauważmy, że jeśli $\Gamma \subset \Gamma'$, to $\Gamma(x : \tau) \subset \Gamma'(x : \tau)$. Przez **rachunek lambda z typami prostymi** (w wersji Curry'ego) rozumiemy system przypisania typów $\lambda \rightarrow$ o następujących regułach:

$$\frac{}{\Gamma(x : \sigma) \vdash x : \sigma},$$

$$\frac{\Gamma(x : \sigma) \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x M) : \sigma \rightarrow \tau},$$

oraz

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau}.$$

Aby dany term mógł mieć przypisany typ w otoczeniu Γ , konieczne jest jednoznaczne przypisanie typów wszystkim jego podtermom. Dlatego dobrze otypowany term można sobie wyobrażać jako term z adnotacjami typowymi "w stylu Churcha". Takie adnotacje stosuje się czasem nieformalnie w formie górnych indeksów. Na przykład napiszemy $(\lambda x^\sigma. N^\tau)P^\sigma : \tau$, żeby zaznaczyć jaki typ użyty został dla x w wyprowadzeniu osądu $(\lambda x. N)P : \tau$.

Lemat 1 (o generowaniu). (1) Jeśli $\Gamma \vdash MN : \sigma$, to $\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma$ i $\Gamma \vdash N : \tau$ dla pewnego τ .
 (2) Jeśli $\Gamma \vdash x : \sigma$, gdzie x jest zmienną, to $\sigma = \Gamma(x)$.
 (3) Jeśli $\Gamma \vdash \lambda x M : \sigma$, to $\sigma = \rho \rightarrow \tau$ dla pewnych ρ i τ , takich że $\Gamma(x : \rho) \vdash M : \tau$.

Lemat 2 (osłabianie). Jeśli $\Gamma \vdash M : \sigma$ oraz $\Gamma \subset \Gamma'$, to $\Gamma' \vdash M : \sigma$.

Dowód. Łatwa indukcja ze względu na wyprowadzenie $\Gamma \vdash M : \sigma$. □

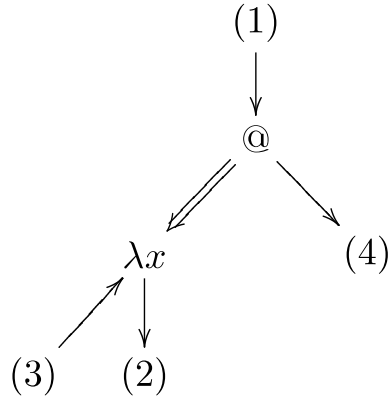
Lemat 3. Jeśli $\Gamma(x : \sigma) \vdash M : \tau$ oraz $\Gamma \vdash N : \sigma$, to $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$.

Dowód. Indukcja ze względu na M . Korzystamy z lematów o generowaniu i osłabianiu. □

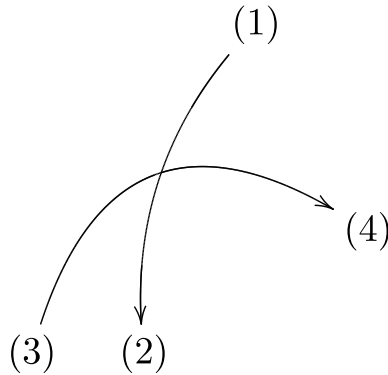
Wniosek 3 (poprawność redukcji). Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$ oraz $M \rightarrow_{\beta_\eta} N$, to $\Gamma \vdash N : \tau$.

Dowód. Indukcja ze względu na definicję $\rightarrow_{\beta\eta}$. Przypadek $M = (\lambda x.P)Q \rightarrow_{\beta} P[x := Q] = N$ wynika z ostatniego lematu. $\square$

Udowodnimy teraz twierdzenie o normalizacji dla termów z typami: każdy typowalny term ma postać normalną. Zaczniemy od odpowiedzi na następujące pytanie: jakie nowe β -redeksy mogą powstać w termie na skutek wykonania jednego kroku β -redukcji? Jeśli term przedstawimy w postaci grafu, to każdy redeks jest wyznaczony przez krawędź skierowaną w lewo od @ do λ :



Usunięcie tej krawędzi powoduje powstanie bezpośrednich połączeń od wierzchołka (1) do (2) oraz od (3) do (4):



Uwaga: Obrazki te są nieco uproszczone. W istocie zamiast jednego wierzchołka (3) mamy ich tyle ile jest wystąpień zmiennej x w podtermie zaczepionym w punkcie (2).

Powstanie nowego redeksu jest możliwe, gdy na skutek skrócenia połączeń pomiędzy (1) i (2) oraz (3) i (4) powstanie krawędź łącząca bezpośrednio wierzchołek typu @ z wierzchołkiem typu λ . Może się to zdarzyć na 3 sposoby:

- (1) W pozycji (1) jest wierzchołek typu @, a w pozycji (2) jest wierzchołek typu λ . Mamy wtedy podterm postaci $(\lambda x \lambda y Q)NP$, który redukuje się do $(\lambda y Q[x := N])P$.
- (2) W pozycji (3) jest wierzchołek typu @, a w pozycji (4) jest wierzchołek typu λ , tj. podterm $(\lambda x \dots x P \dots)(\lambda y Q)$ redukuje się do $\dots(\lambda y Q)P \dots$.
- (3) Wierzchołki (2) i (3) są sklejone w jeden, w pozycji (1) jest wierzchołek typu @, a w pozycji (4) jest wierzchołek typu λ . Tak jest w przypadku podtermu $(\lambda x x)(\lambda y Q)P$, który redukuje się do $(\lambda y Q)P$.

Oczywiście na skutek redukcji może także dojść do zwielokrotnienia redeksów już istniejących.

Twierdzenie 1. *Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$ to M ma postać normalną.*

Dowód. Rozważamy pewne ustalone wyprowadzenie osądu $\Gamma \vdash M : \tau$. To wyprowadzenie jednoznacznie określa przypisanie typów dla wszystkich termów, które można otrzymać z M w drodze redukcji. A zatem możemy bez obawy nieporozumienia stosować adnotacje typowe w formie indeksów. **Rangą redeksu** $(\lambda x^\sigma. P^\tau)Q^\sigma$ nazwiemy długość typu $\sigma \rightarrow \tau$, czyli typu przypisanego abstrakcji $(\lambda x. P)$. **Ranga termu** to maksymalna ranga występujących w nim redeksów.

Dowód twierdzenia przebiega przez indukcję ze względu na dwa parametry (n, m) , gdzie n jest rangą termu M a m jest liczbą redeksów rangi n występujących w M . Wystarczy udowodnić, że na skutek redukcji odpowiednio wybranego redeksu w M para (n, m) musi się (leksykograficznie) zmniejszyć. Wybrać należy redeks rangi n położony (zaczynający się) na jdalej jak to możliwe na prawo. Przy takiej redukcji zwielokrotnieniu mogą ulec tylko redeksy mniejszej rangi (położone na prawo). Pozosta je zauważyć, że nowe redeksy powstające w wyniku naszej redukcji też muszą być rangi mniejszej od n . Mamy bowiem trzy wcześniej wspomniane możliwości:

- (1) $(\lambda x^\alpha \lambda y^\beta. Q^\gamma) N^\alpha P^\beta \rightarrow (\lambda y^\beta Q[x := N]^\gamma) P^\beta$.
- (2) $(\lambda x^{\alpha \rightarrow \gamma} \dots x P^\alpha \dots)^\beta (\lambda y^\alpha Q^\gamma) \rightarrow \dots (\lambda y^\alpha Q^\gamma) P \dots$
- (3) $(\lambda x^{\alpha \rightarrow \beta} x^{\alpha \rightarrow \beta}) (\lambda y^\alpha Q^\beta) P^\alpha \rightarrow (\lambda y^\alpha Q^\beta) P^\alpha$.

W każdym z przypadków nowy redeks jest mniejszej rangi niż redeks wyeliminowany:

- (1) Abstrakcję typu $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ zastąpiono przez abstrakcję typu $\beta \rightarrow \gamma$.
- (2) Abstrakcję typu $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta$ zastąpiono przez abstrakcję typu $\alpha \rightarrow \gamma$.
- (3) Abstrakcję typu $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ zastąpiono przez abstrakcję typu $(\alpha \rightarrow \beta)$.

□

Twierdzenie o normalizacji można wzmocnić: term rachunku lambda z typami redukuje się zawsze do postaci normalnej, niezależnie od przyjętej strategii. Inaczej mówiąc, wszystkie termy z typami mają własność silnej normalizacji (SN). Moralny sens tego faktu jest taki: statyczna kontrola typów gwarantuje terminację obliczenia niezależnie od kolejności ewaluacji. Program z typami może się zapętlić tylko wtedy, gdy jakiś jego składnik jawnie na to pozwala (np. zawiera on pętlę, rekursję itp.).

Metoda dowodu silnej normalizacji (computability method) pochodzi od Williama Taita i bywa stosowana także dla dowodu innych własności języków z typami. W istocie polega ona na konstrukcji pewnego syntaktycznego modelu dla typów prostych. Niestety, ramy czasowe tego wykładu nie pozwolą nam na omówienie w szczegółach modeli dla rachunku λ , odnotujemy więc tylko twierdzenie bez dowodu:

Twierdzenie 2 (silna normalizacja). *Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$ dla pewnych Γ i τ to term M jest silnie normalizowalny.*

Możemy teraz (nareszcie!) opowiedzieć o izomorfizmie Curry-Howarda. Typy proste można utożsamiać z formułami zdaniowymi zbudowanymi z atomów (zmiennych zdaniowych) za pomocą samej implikacji. Ta analogia nie jest przypadkowa, bo reguły wyprowadzania typów odpowiadają regułom wnioskowania:

$$\frac{}{\Gamma, \sigma \vdash \sigma},$$

$$\frac{\Gamma, \sigma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \tau},$$

oraz

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau}.$$

Reguły te otrzymaliśmy przez wytarcie z reguł systemu $\lambda_{\rightarrow}$ wszystkiego co dotyczy termów i pozostawienie tylko informacji o typach. Oczywiście symbol Γ , występujący w regułach wnioskowania, oznacza po prostu zbiór formuł. Logika określona tymi regułami to **minimalna logika implikacyjna**.

Jeśli Γ jest otoczeniem typowym, to przez $|\Gamma|$ oznaczmy zbiór formuł $\{\Gamma(x) | x \in \text{Dom}(\Gamma)\}$. Następujące twierdzenie wyraża w uproszczeniu odpowiedniość nazywaną często **izomorfizmem Curry-Howarda**:

Twierdzenie 3. (1) *Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$ w systemie $\lambda_{\rightarrow}$, to $|\Gamma| \vdash \tau$ w logice minimalnej.*
 (2) *Jeśli $\Gamma \vdash \tau$ w logice minimalnej, to istnieje takie otoczenie typowe Δ , że $|\Delta| = \Gamma$ oraz $\Delta \vdash M : \tau$ dla pewnego M w systemie $\lambda_{\rightarrow}$.*

Dowód. Łatwa indukcja, którą pozostawiamy jako ćwiczenie. □

W sensie ogólnym, izomorfizm Curry-Howarda to właśnie ścisła odpowiedniość pomiędzy

- formułami i typami,
- dowodami i termami (programami).

Powstaje pytanie czy logika minimalna to to samo co implikacyjny fragment logiki klasycznej. Otóż nie. Następująca klasyczna tautologia, zwana prawem Peirce'a, nie jest twierdzeniem logiki minimalnej:

$$\pi = ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$$

Można to łatwo stwierdzić, korzystając z prostej obserwacji: jeśli istnieje term M typu τ , to istnieje też taki term w postaci normalnej. Pozosta je więc zbadać, jak może wyglądać zamknięty term typu π w postaci normalnej i przekonać się, że nijak.

Na czym polega różnica? Logika minimalna jest konstruktywna. Implikacja w tej logice jest traktowana jak typ pewnej funkcji. Dowód formuły postaci $\alpha \rightarrow \beta$ musi polegać na wskazaniu metody przekształcenia każdego potencjalnego dowodu ("konstrukcji") założenia α w poprawny dowód formuły β . Nie ma innego kryterium prawdy oprócz dowodu, w szczególności nie wystarczy odwołanie do dwuwartościowej semantyki.

Odpowiedniość pomiędzy formułami i typami byłaby niepełna, gdyby nie rozciągała się na spójniki logiczne inne niż implikacja. W istocie nietrudno jest zinterpretować w tym duchu zarówno koniunkcję jak i alternatywę. Zaczniemy od przypomnienia reguł naturalnej dedukcji dla tych spójników.

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}, \quad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi},$$

oraz

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \zeta \quad \Gamma, \psi \vdash \zeta}{\Gamma \vdash \zeta}.$$

Reguły te możemy objaśniać w myśl tzw. interpretacji BHK (od nazwisk: Brouwer, Heyting, Kołmogorow).

- Dowód koniunkcji składa się z dowodów jej składowych, jest więc (uporządkowaną) parą dowodów,
- Dowód alternatywy to dowód jednego z jej członów (ze wskazaniem którego).

A zatem koniunkcja odpowiada iloczynowi kartezjańskiemu (rekordowi) a alternatywa sumie prostej (wariantowi). Wprowadzanie koniunkcji to tworzenie pary, a eliminacja koniunkcji to rzutowanie:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \phi \quad \Gamma \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \phi \wedge \psi}$$

oraz

$$\frac{\Gamma \vdash M : \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \phi}, \quad \frac{\Gamma \vdash M : \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \psi}.$$

Wprowadzanie alternatywy odpowiada tworzeniu obiektu wariantowego. Eliminacja alternatywy to instrukcja wyboru:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \phi}{\Gamma \vdash \mathbf{inl}(M) : \phi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma \vdash M : \psi}{\Gamma \vdash \mathbf{inr}(M) : \phi \vee \psi}$$

oraz

$$\frac{\Gamma \vdash M : \phi \vee \psi \quad \Gamma, x : \phi \vdash P : \zeta \quad \Gamma, y : \psi \vdash Q : \zeta}{\Gamma \vdash \mathbf{case} M \mathbf{ of } [x]P, [y]Q : \zeta}.$$

Dla tak rozszerzonego języka możemy teraz postulować następujące redukcje. β –redukcje:

$$\begin{aligned} \pi_1(\langle M, N \rangle) &\rightarrow M, \quad \pi_2(\langle M, N \rangle) \rightarrow N, \\ \mathbf{case} \mathbf{inl}(P) \mathbf{ of } [x]M, [y]N &\rightarrow M[x := P], \\ \mathbf{case} \mathbf{inr}(Q) \mathbf{ of } [x]M, [y]N &\rightarrow N[y := Q]. \end{aligned}$$

η –redukcje:

$$\begin{aligned} \langle \pi_1(M), \pi_2(M) \rangle &\rightarrow M, \\ (\mathbf{case} M \mathbf{ of } [x]\mathbf{inl}x, [y]\mathbf{inr}y) &\rightarrow M. \end{aligned}$$

Mówimy tu o β i η redukcjach przez analogię z redukcjami dla implikacji. β redeks odpowiada wprowadzeniu spójnika, po którym natychmiast następuje jego eliminacja. Natomiast postulat η –redukcji odpowiada założeniu, że każde wyrażenie danego typu opisuje pewien kanoniczny obiekt tego typu (funkcję, parę, wariant — ogólnie rezultat operacji wprowadzenia).

Pozostaje sprawa negacji, którą jednak możemy zinterpretować jako specyficzną implikację:

$$\neg \alpha = \alpha \rightarrow \perp$$

Symbol $\perp$ oznacza fałsz, który oczywiście nie może mieć dowodu. Nie ma więc kanonicznych obiektów typu $\perp$ – jest to typ pusty. Mamy jednak regułę eliminacji fałszu:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \perp}{\Gamma \vdash \epsilon_\phi(M) : \phi},$$

gdzie symbol ϵ_ϕ oznacza cud typu ϕ . Skoro mamy rzecz, której nie ma, to znaczy, że możemy z niej zrobić co zechcemy.

Reguły wprowadzania i eliminacji spójników tworzą system naturalnej dedukcji dla zdaniowej **logiki intuicjonistycznej**. Logika minimalna to jej fragment implikacyjny. Zauważmy, że nie ma wśród naszych reguł zasady wnioskowania przez zaprzeczenie, np. takiej:

$$\frac{\Gamma, \neg \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi}.$$

Dlatego twierdzeniami logiki intuicjonistycznej nie jest żadna z formuł postaci $p \vee \mathit{neg}p, \neg \neg p \rightarrow p, (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q \rightarrow p$, prawo Peirce’a, ani wiele innych praw logiki klasycznej.