

8. WYKŁAD 10: RACHUNEK λ . STANDARYZACJA.

W jednym termie może występować więcej niż jeden redeks. Możliwe są więc różne strategie redukcji. Jedną z nich polega na wybieraniu zawsze tego redeksu, który zaczyna się najbardziej na lewo. Mówimy wtedy o **redukcji lewostronnej**. Okazuje się, że strategia redukcji lewostronnej jest **strategią normalizującą**, tj. tą metodą zawsze dojdziemy do postaci normalnej, jeśli ona istnieje.

W istocie prawdziwe jest nieco silniejsze twierdzenie, zwane **twierdzeniem o standaryzacji**. Powiemy, że wyprowadzenie

$$M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$$

jest **standardowe**, jeżeli dla dowolnego $i = 0, \dots, n-2$, w kroku $M_i \rightarrow M_{i+1}$ redukujemy redeks położony nie dalej od początku termu niż redeks, który redukujemy w następnym kroku $M_{i+1} \rightarrow M_{i+2}$.

Na przykład ta redukcja jest standardowa:

$$\begin{aligned} & (\lambda x.xx)((\lambda zy.z(zy))(\lambda u.u)(\lambda w.w)) \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda y.(\lambda u.u)((\lambda u.u)y))(\lambda w.w)) \rightarrow \\ & \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda u.u)((\lambda u.u)(\lambda w.w))) \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda u.u)(\lambda w.w)) \rightarrow (\lambda x.xx)(\lambda w.w) \end{aligned}$$

a ta nie jest:

$$\begin{aligned} & (\lambda x.xx)((\lambda zy.z(zy))(\lambda u.u)(\lambda w.w)) \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda y.(\lambda u.u)((\lambda u.u)y))(\lambda w.w)) \rightarrow \\ & \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda y.(\lambda u.u)y)(\lambda w.w)) \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda w.w)) \rightarrow (\lambda x.xx)(\lambda w.w) \end{aligned}$$

Twierdzenie 1. *Jeśli $M \rightarrow_\beta N$, to istnieje standardowa redukcja z M do N .*

Dowód zaczniemy od tego, że każdy term M jest jednej z dwóch możliwych postaci:

- (1) $\lambda \vec{x}.z\vec{R}$;
- (2) $\lambda \vec{x}.(\lambda y.P)Q\vec{R}$,

gdzie długość wektora $\vec{x}$ może być zerem, a z może występować wśród zmiennych $\vec{x}$ lub nie.

W przypadku (1) mówimy, że term jest w **czołowej postaci normalnej**.

W przypadku (2) mówimy, że term ma **redeks czołowy** $(\lambda y.P)Q$. Krok redukcji

$$M = \lambda \vec{x}.(\lambda y.P)Q\vec{R} \rightarrow_\beta \lambda \vec{x}.P[y := Q]\vec{R} = N$$

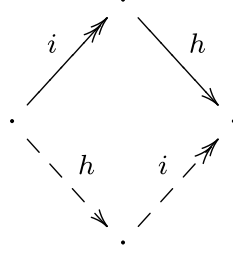
nazywamy wtedy **redukcją czołową** i zapisujemy $M \xrightarrow{h} N$. Inne kroki redukcji nazywamy **wewnętrznymi**, a w takim przypadku używamy symbolu $\xrightarrow{i}$.

Kluczowy lemat mówi, że redukcje czołowe można wykonać przed wewnętrznymi:

Lemat 1. *Jeżeli $M \rightarrow_\beta N$, to $M \xrightarrow{h} P \xrightarrow{i} N$, dla pewnego P .*

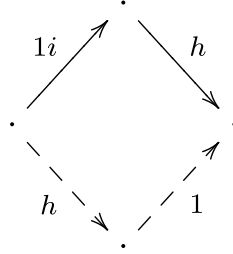
Jeśli udowodnimy ten lemat, to pozostaje tylko zauważyć, że po wykonaniu wszystkich redukcji czołowych, kształt termu się częściowo "ustala" tj. mamy albo $M \xrightarrow{h} \lambda \vec{x}z\vec{R}$ albo $M \xrightarrow{h} \lambda \vec{x}.(\lambda y.P)Q\vec{R}$ i dalsze redukcje odbywają się wewnątrz P , Q i $\vec{R}$. Stosując indukcję do termów P , Q i $\vec{R}$, otrzymujemy standardowe redukcje, które wykonujemy "od lewej" tj. najpierw w P , potem w Q i potem w kolejnych wyrazach ciągu $\vec{R}$.

Naiwna próba dowodu lematu mogłaby być taka:

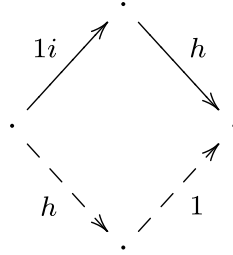


Niestety redukcja $(\lambda x P)Q \xrightarrow{i} (\lambda x P')Q' \xrightarrow{h} P'[x := Q']$ może nie dać się zastąpić przez $(\lambda x P)Q \xrightarrow{h} P[x := Q] \xrightarrow{i} P'[x := Q']$, bo kroki wewnątrz P lub wewnątrz Q mogą być czołowe.

Idea dowodu polega na użyciu redukcji postaci $\xrightarrow{1}$, które łatwiej rozbić na część czołową i wewnętrzną. Zaczniemy od takiego (łatwego) diagramu gdzie $\xrightarrow{1i}$ oznacza ciąg redukcji wewnętrznych, które jednocze-



śnie stanowią redukcję postaci $\xrightarrow{1}$. Jeśli teraz uda nam się rozbić $\xrightarrow{1}$ na fazę czołową i fazę postaci $\xrightarrow{1i}$, to dostaniemy diagram



A zatem chcemy udowodnić, że

(1) jeśli $M \xrightarrow{1} N$ to $M \xrightarrow{h} L \xrightarrow{1i} N$, dla pewnego L ,

i natychmiast mamy kłopot, gdy M jest redeksem $(\lambda x P)Q$. Chcemy bowiem wywnioskować, że

$$P[x := Q] \xrightarrow{1i} P'[x := Q'],$$

a wiemy tylko, że

$$P \xrightarrow{1} P' \text{ i } Q \xrightarrow{1} Q',$$

skąd mamy zaledwie

$$P[x := Q] \xrightarrow{1} P'[x := Q'].$$

Potrzebna jest relacja $\Rightarrow$, która ma taką własność:

(2) jeśli $M \Rightarrow M'$ oraz $N \Rightarrow N'$ to $M[x := N] \Rightarrow M'[x := N']$,

rozkłada się na $\xrightarrow{h}$ i $\xrightarrow{1i}$ i na dodatek zawiera relację $\xrightarrow{1}$.

Definiujemy ją tak: $M \Rightarrow N$ zachodzi wtedy, gdy $M \xrightarrow{h} P \xrightarrow{1i} N$, oraz każdy term Q występujący w redukcji $M \xrightarrow{h} P$ spełnia warunek $Q \xrightarrow{1} N$. Należy teraz udowodnić własność (2). Z jej pomocą przez indukcję ze względu na definicję relacji $\xrightarrow{1}$ dowodzi się, że $\xrightarrow{1} \subset \Rightarrow$, a teraz (1) jest już oczywiste. Udowodniliśmy więc twierdzenie o standaryzacji.

Wniosek 1 (twierdzenie o normalizacji). *Jeśli M ma postać normalną N , to istnieje lewostronna redukcja z M do N .*

Powyższy wniosek można odczytać tak: Jeśli istnieje nieskończona redukcja lewostronna zaczynająca się od M , to term M nie ma postaci normalnej.

Można to twierdzenie wzmocnić w taki sposób. Powiemy, że nieskończony ciąg redukcji jest **quasi-lewostronny**, jeśli nieskończenie wiele razy następuje w tym ciągu redukcja redeksu położonego najbardziej na lewo.

Twierdzenie 2. *Jeśli istnieje nieskończony quasi-lewostronny ciąg redukcji zaczynający się od M , to term M nie ma postaci normalnej.*

Dowód. Na potrzeby tego dowodu powiedzmy, że term jest **wytrzymały**, gdy ma nieskończoną redukcję quasi-lewostronną, w której występuje nieskończenie wiele kroków postaci $\xrightarrow{h}$. Zauważmy, że jeśli N jest wytrzymały, to $N \xrightarrow{h} N'$ dla pewnego wytrzymałego termu N' .

Założmy teraz, że M ma postać normalną. Przez indukcję ze względu na jej długość udowodnimy, że M nie może mieć nieskończonej redukcji quasi-lewostronnej. Przypuśćmy najpierw, że M jest termem wytrzymałym. Można wtedy zdefiniować ciąg wytrzymałych termów N_i , takich że $N_0 = M$ oraz $N_i \xrightarrow{h} N_{i+1}$ dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$. Inaczej mówiąc, "wyciągając na początek" redukcje czołowe otrzymamy nieskończoną redukcję czołową (a więc lewostronną) termu M . Nie może więc istnieć postać normalna.

Zatem jeśli $M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$ jest nieskończoną redukcją quasi-lewostronną, to od pewnego miejsca mamy tylko redukcje wewnętrzne postaci $\vec{z}.y\vec{P} \xrightarrow{i} \vec{z}.y\vec{P}' \xrightarrow{i} \vec{z}.y\vec{P}'' \xrightarrow{i} \dots$. Spośród redukcji lewostronnych występujących w tym ciągu, nieskończenie wiele dotyczy tej samej składowej wektora $\vec{P}$, więc wystarczy użyć założenia indukcyjnego. $\square$