

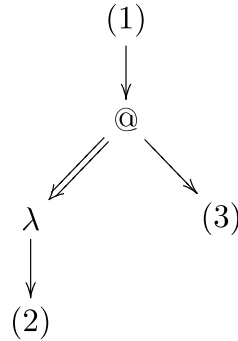
8. WYKŁAD 8: RACHUNEK λ . β -REDUKCJE I TWIERDZENIE CHURCHA-ROSERA.

Relacja **β -redukcji** to najmniejsza relacja w zbiorze λ -termów, spełniająca warunki:

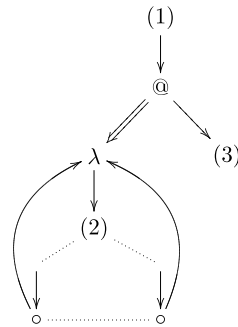
- $(\lambda x P)Q \rightarrow_\beta P[x := Q]$;
- jeśli $M \rightarrow_\beta M'$, to $MN \rightarrow_\beta M'N$, $NM \rightarrow_\beta NM'$ oraz $\lambda x M \rightarrow_\beta \lambda x M'$.

Inaczej mówiąc, $M \rightarrow_\beta M'$ zachodzi, gdy podterm termu M postaci $(\lambda x P)Q$, czyli **β -redeks**, zostaje zamieniony na $P[x := Q]$. Znakiem $\rightarrow_\beta$ oznaczamy domknięcie przechodnio-zwrotne relacji $\rightarrow_\beta$ (tj. najmniejszą relację przechodnią i zwrotną zawierającą $\rightarrow_\beta$), a znakiem $=_\beta$ na jmniejszą relację równoważności zawierającą β . Tę ostatnią nazywamy relacją **β -równości**.

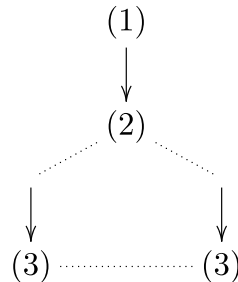
Z punktu widzenia grafowego, beta-redeks to krawędź od @ do λ :



Beta-redukcja polega na usunięciu tej krawędzi, tj. na "wyprostowaniu" drogi od (1) do (2). Każda krawędź wchodząca do λ (reprezentująca wystąpienie zmiennej związanej) zostaje przy tym skierowana do osobnej kopii termu zaczepionego w (3). Inaczej, podgraf postaci



zostaje zastąpiony podgrafem postaci:



Może się zdarzyć, że lambda nie wiąże żadnego wystąpienia zmiennej (nie ma żadnej krawędzi prowadzącej do λ). Wtedy podgraf (3) znika. Odpowiada to redukcji postaci

$$(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M,$$

gdzie $x \notin F_V(M)$.

Lemat 1. *Jeśli $M \twoheadrightarrow_\beta M'$ i $N \twoheadrightarrow_\beta N'$ to $M[x := N] \twoheadrightarrow_\beta M'[x := N']$.*

Dowód. Należy pokazać dwa prostsze stwierdzenia:

- (1) Jeśli $M \rightarrow_\beta M'$, to $M[x := N] \rightarrow_\beta M'[x := N]$;
- (2) Jeśli $N \rightarrow_\beta N'$, to $M[x := N] \rightarrow_\beta M[x := N']$,

a następnie zastosować indukcję ze względu na liczbę kroków redukcji. Zarówno (1) jak (2) można udowodnić przez indukcję ze względu na długość termu M . Istotny przypadek w dowodzie części (1) zachodzi wtedy, gdy $M = (\lambda y P)Q$ i $M' = P[y := Q]$, dla pewnych P, Q . Przyjmując $y \notin F_V(N)$, mamy

$$\begin{aligned} M[x := N] &= (\lambda y. P[x := N])Q[x := N] \rightarrow_\beta \\ &\rightarrow_\beta P[x := N][y := Q[x := N]] = \\ &= P[y := Q][x := N] = M'[x := N], \end{aligned}$$

na mocy Lematu o Podstawieniu. Szczegóły pozostawiamy jako ćwiczenie. $\square$

Rachunek λ bez typów można przedstawić jako system dedukcyjny o następujących aksjomatach i regułach wnioskowania:

(1)

$$\overline{(\lambda x M)N = M[x := N]}$$

(2)

$$\overline{x = x}$$

(3)

$$\frac{M = N}{MP = NP}$$

(4)

$$\frac{M = N}{PM = PN}$$

(5)

$$\frac{M = N}{\lambda x M = \lambda x N}$$

(6)

$$\frac{M = N}{N = M}$$

(7)

$$\frac{M = N, N = P}{M = P}$$

Jeśli w tym systemie można wyprowadzić równość $M = N$, to napiszemy $\lambda \vdash M = N$. Łatwo sprawdzić równoważność:

$$\lambda \vdash M = N \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } M = N$$

Term postaci $(\lambda x P)Q$ nazywamy **β -redeksem**. Jeśli w termie M nie występuje żaden β -redex, to dla żadnego N nie zachodzi $M \rightarrow_\beta N$. Mówimy wtedy, że M jest w postaci **β -normalnej**, lub po prostu w postaci **normalnej**. Nietrudno zauważyć, że postaci normalne to dokładnie termy kształtu $\lambda \vec{x}. y \vec{N}$, gdzie $\vec{N}$ są normalne.

Przykład: Następujące termy są w postaci normalnej:

- $I = \lambda x.x$;
- $K = \lambda xy.x$;
- $S = \lambda xyz.xz(yz)$;
- $\omega = \lambda x.xx$.

Natomiast term $\Omega = \omega\omega$ nie jest w postaci normalnej, bo $\Omega \rightarrow_\beta \Omega$.

Jeśli $M \rightarrow_\beta N$ i N jest w postaci normalnej, to mówimy, że M ma **postać normalną**, i że N jest **postacią normalną** termu M .

Mówimy, że term M ma **własność silnej normalizacji** (jest **silnie normalizowalny**) jeżeli nie istnieje nieskończony ciąg redukcji

$$M = M_0 \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta M_2 \rightarrow_\beta \dots$$

Oczywiście term silnie normalizowalny musi mieć postać normalną.

Piszemy $M \downarrow_\beta N$, gdy istnieje taki term P , że $M \rightarrow_\beta P \leftarrow_\beta N$.

Relacja **η -redukcji** jest to najmniejsza relacja $\rightarrow_\eta$, spełniająca warunki:

- $\lambda x.Mx \rightarrow_\eta M$, gdy $x \notin F_V(M)$;
- jeśli $M \rightarrow_\eta M'$, to $MN \rightarrow_\eta M'N$, $NM \rightarrow_\eta NM'$ oraz $\lambda xM \rightarrow_\eta \lambda xM'$.

Symbole $\rightarrow$ i $\rightarrow_\beta$ domyślnie będą oznaczały $\rightarrow_\beta$ i $\rightarrow_\beta$. Symbol $\rightarrow_{\beta\eta}$ będzie oznaczał sumę (mnogościową) relacji $\rightarrow_\beta$ i $\rightarrow_\eta$. Używając notacji $\rightarrow_\eta$ i $\rightarrow_{\beta\eta}$ możemy analogicznie zdefiniować **postać η -normalną** oraz **$\beta\eta$ -normalną**.

Jeżeli do aksjomatów i reguł równościowych rozważanych powyżej dodamy nowy aksjomat

$$\lambda x.Mx = M,$$

dla $x \notin F_V(M)$, to oczywiście otrzymamy system wnioskowania pozwalający na wyprowadzenie równości $M = N$ wtedy i tylko wtedy gdy $M =_{\beta\eta} N$.

Mniej oczywiste jest to, że aksjomat ten można równoważnie zastąpić przez następującą **regułę ekstensjonalności**:

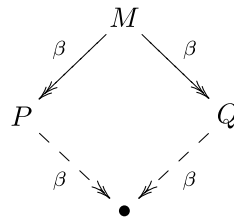
$$\frac{Mx = Nx}{M = N} (x \notin F_V(M) \cup F_V(N))$$

W myśl reguły ekstensjonalności funkcje, które dla tych samych argumentów dają te same wyniki, są równe.

W jednym termie może występować więcej niż jeden redeks. Można więc go redukować na różne sposoby. Niedobrze jednak byłoby, gdyby te różne ciągi redukcji prowadziły do nieodwracalnie różnych rezultatów. Na szczęście mamy **twierdzenie Churcha-Rossera**:

Twierdzenie 1. *Jeśli $P \leftarrow_\beta M \rightarrow_\beta Q$, to $P \downarrow_\beta Q$.*

Treść tego twierdzenia można zilustrować następującym diagramem:



Inaczej mówiąc, relacja $\rightarrow_\beta$ ma **własność rombu**.

Zauważmy, że własność rombu nie zachodzi dla relacji $\rightarrow_\beta$. Jako przykład można podać term

$$M = (\lambda x.xx)((\lambda x.x)y).$$

Zanim udowodnimy twierdzenie Churcha-Rossera, zauważmy, że zjawisko, o którym mówimy, może dotyczyć każdej relacji dwuargumentowej. Poniżej przyjmujemy taką konwencję: podwójna strzałka zawsze oznacza domknięcie przechodnio-zwrotne relacji oznaczonej strzałką pojedynczą.

Mówimy, że relacja $\rightarrow$ w zbiorze A ma **własność Churcha-Rossera** (CR), jeżeli dla dowolnych elementów $a, b, c \in A$, takich że

$$b \leftarrow a \rightarrow c,$$

istnieje takie d , że

$$b \rightarrow d \leftarrow c.$$

Relacja $\rightarrow$ ma **słabą własność Churcha-Rossera** (WCR), jeżeli dla dowolnych elementów $a, b, c \in A$, takich że

$$b \leftarrow a \rightarrow c,$$

istnieje takie d , że

$$b \rightarrow d \leftarrow c.$$

Relacja $\rightarrow$ ma **własność silnej normalizacji** (SN), jeżeli nie istnieje nieskończony ciąg postaci

$$a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$$

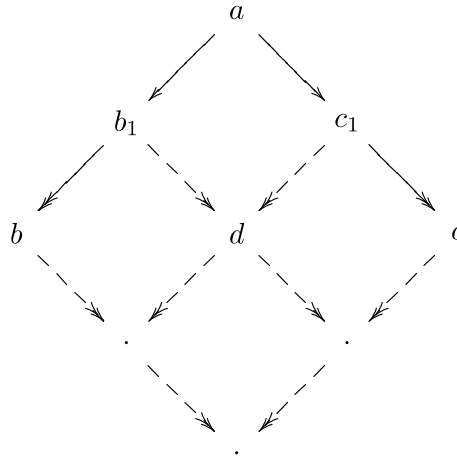
Oczywiście własność rombu implikuje CR (ale nie na odwrót), a własność CR implikuje WCR. Mniej oczywiste jest to, że własność CR nie wynika z WCR. Najprostszy przykład jest taki:

$$\bullet \leftarrow \bullet \leftrightarrow \bullet \rightarrow \bullet$$

Jeśli jednak relacja $\rightarrow$ ma własność silnej normalizacji, implikację można odwrócić:

Lemat 2 (lemat Newmana). *Jednoczesne zachodzenie WCR i SN implikuje CR.*

Treść tego lematu można zilustrować następującym diagramem:



Dowód. Jeśli relacja $\rightarrow$ ma własność SN to relacja $\leftarrow$ jest dobrym ufundowaniem zbioru A , tj. nie istnieje nieskończony zstępujący ciąg $a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow a_3 \dots$. Przez indukcję ze względu na porządek $\leftarrow$ dowodzimy, że każdy element $a \in A$ ma własność:

$$\text{Dla dowolnych } b, c, \text{ jeśli } b \leftarrow a \rightarrow c, \text{ to } b \downarrow c.$$

Jeśli $a = b$ lub $a = c$ to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że

$$b \leftarrow b_1 \leftarrow a \rightarrow c_1 \rightarrow c.$$

Na mocy WCR jest takie d , że $b_1 \twoheadrightarrow d \leftarrow c_1$. Z założenia indukcyjnego, zastosowanego do b_1 i c mamy więc $b \downarrow d \downarrow c$ i możemy zastosować założenie indukcyjne dla d . $\square$

Na potrzeby dowodu twierdzenia Churcha-Rossera zdefiniujemy relację $\xrightarrow{1}$, określona jako najmniejsza relacja na termach, która spełnia następujące warunki:

- $x \xrightarrow{1} x$, gdy x jest zmienną;
- jeśli $M \xrightarrow{1} M'$, to $\lambda x M \xrightarrow{1} \lambda x M'$;
- jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ i $N \xrightarrow{1} N'$, to $MN \xrightarrow{1} M'N'$, oraz $(\lambda x M)N \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Relacja $\xrightarrow{1}$ odpowiada jednoczesnej redukcji kilku beta-redeksów występujących w termie.

Lemat 3. (1) Dla dowolnego M zachodzi $M \xrightarrow{1} M$.

(2) Jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ i $N \xrightarrow{1} N'$, to $M[x := N] \xrightarrow{1} M'[x := N']$.

Dowód. Dowód części (1) jest przez indukcję ze względu na budowę M , a dowód części (2) przez indukcję ze względu na wyprowadzenie $M \xrightarrow{1} M'$. Oznacza to, że zbiór par termów $\{(M, M') : M \xrightarrow{1} M'\}$ przedstawiamy jako sumę wstępującego ciągu zbiorów X_i , gdzie $X_0 = \{(x, x) : x \text{ jest zmienną}\}$, oraz X_{i+1} powstaje z X_i przez dodanie wszystkich par $(MN, M'N')$, $((\lambda x M)N, M'[x := N'])$ oraz $(\lambda x M, \lambda x M')$, dla dowolnych (M, M') i (N, N') , które są już w X_i i indukcję prowadzimy ze względu na i , że $(M, M') \in X_i$.

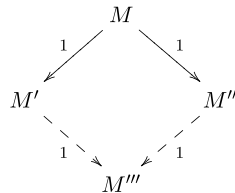
W dowodzie punktu (2) nieoczywisty jest przypadek, gdy $M = (\lambda y P)Q \xrightarrow{1} P'[y := Q']$, gdzie $P \xrightarrow{1} P'$ oraz $Q \xrightarrow{1} Q'$. Zakładając, że zmienna związana y jest tak wybrana, że $y \notin F_V(N)$ i korzystając z założenia indukcyjnego o $P \xrightarrow{1} P'$ i $Q \xrightarrow{1} Q'$, mamy wtedy na mocy Lematu o Podstawieniu:

$$\begin{aligned} M[x := N] &= (\lambda y P[x := N])Q[x := N] \xrightarrow{1} \\ &\xrightarrow{1} P'[x := N'] [y := Q'[x := N']] = \\ &= P'[y := Q'] [x := N']. \end{aligned}$$

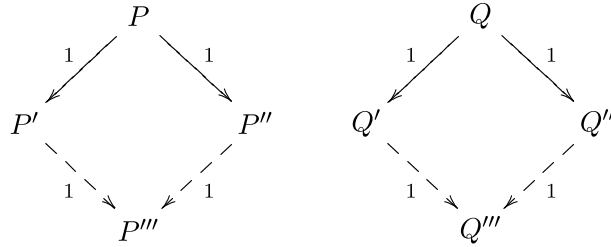
$\square$

Lemat 4. Relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu, tj. jeśli $M \xrightarrow{1} M'$ i $M \xrightarrow{1} M''$, to dla pewnego termu M''' zachodzi $M' \xrightarrow{1} M''' \xleftarrow{1} M''$.

Treść tego lematu można zilustrować następującym diagramem:

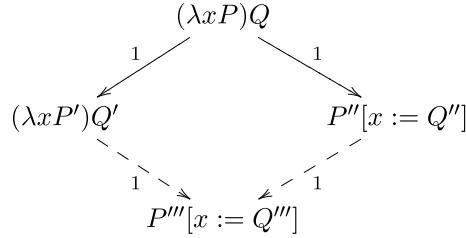


Dowód. Dowód jest przez indukcję ze względu na wyprowadzenie $M \xrightarrow{1} M'$. Większość przypadków jest łatwa. Niech na przykład $M = \lambda x P \xrightarrow{1} \lambda x P' = M'$, gdzie $P \xrightarrow{1} P'$. Wtedy term M'' musi być postaci $\lambda x P''$ i należy skorzystać z założenia indukcyjnego o $P \xrightarrow{1} P'$. Mniej trywialny jest np. przypadek gdy $M = (\lambda x P)Q$ oraz $M' = (\lambda x P')Q'$ a $M'' = P''[x := Q'']$. Wtedy $P \xrightarrow{1} P', P''$ i $Q \xrightarrow{1} Q', Q''$. Z założenia indukcyjnego dla $P \xrightarrow{1} P'$ i $Q \xrightarrow{1} Q'$ dostajemy Dla zakończenia dowodu wystarczy skorzystać



z poprzedniego lematu tak, jak na diagramie:

□



Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia Churcha-Rossera:

Dowód. Ponieważ relacja $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu, więc tym bardziej jej domknięcie przechodnio-zwrotne $\xrightarrow{1}$ ma własność rombu. Zauważmy teraz, że mamy następujące zawierania pomiędzy relacjami:

$$\rightarrow_{\beta} \subset \xrightarrow{1} \subset \twoheadrightarrow_{\beta}.$$

Stąd łatwo wywnioskować, że relacje $\xrightarrow{1}$ i $\twoheadrightarrow_{\beta}$ są równe, a więc $\rightarrow_{\beta}$ ma własność rombu.

□